

N° D'ORDRE :

752

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE Titre d'INGENIEUR-DOCTEUR

PAR

Jacques EUGENE

1962

1^{re} THESE. — « Essai de définition d'un programme rationnel
d'étude d'un modèle représentant les durées de vie en fatigue ».

2^e THESE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 30 Mai 1962 devant la Commission d'examen.

MM. VILLE.....

Président.

FORTET.....

MAZET.....

} Examineurs.

N° D'ORDRE :

752

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE Titre d'INGENIEUR-DOCTEUR

PAR

Jacques EUGENE

1^{re} THESE. — « *Essai de définition d'un programme rationnel d'étude d'un modèle représentant les durées de vie en fatigue* ».

2^e THESE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 30 Mai 1962 devant la Commission d'examen.

MM. VILLE..... Président.

FORTET.....

MAZET.....

} Examinateurs.



S O M M A I R E

	<u>Pages</u>
CHAPITRE I - INTRODUCTION	1
CHAPITRE II - LES DIFFERENTS MODELES EXISTANTS POUR REPRESENTER LES DUREES DE VIE EN FATIGUE	7
CHAPITRE III - LA THEORIE DE GRIFFITH	19
CHAPITRE IV - LA PROPAGATION DE LA FISSURE : PROCESSUS POISSONNIEN	29
CHAPITRE V - LA LOI DE REPARTITION DES DUREES DE VIE	35
CHAPITRE VI - RELATION ENTRE LES PARAMETRES STATIS- TIQUES et , ET LA CONTRAINTE	43
CHAPITRE VII - EFFETS DE LA VARIATION DES CONDITIONS D'APPLICATION DE LA CHARGE	63
CHAPITRE VIII - DUREE DE VIE D'UNE STRUCTURE	79
CHAPITRE IX - EN CONCLUSION : UN PROGRAMME D'ETUDE	87
BIBLIOGRAPHIE -	91
ANNEXE I - RESULTATS D'ESSAIS DE FATIGUE SUD- AVIATION AU PALIER 0,5	93
ANNEXE II - CALCUL DE CORRESPONDANT AUX RESUL- TATS SUD-AVIATION	127
ANNEXE III - CALCUL DE ET VERIFICATION DE LA FORMULE :	133
ANNEXE IV - CALCUL DE LA COURBE DE WOHLER POUR LES RESULTATS SUD-AVIATION	137
ANNEXE V - CALCUL DE LA FONCTION DE REPARTITION DE LA DUREE DE VIE D'APRES LA LOI DE MINER	139
ANNEXE VI - NOTE SUR L'UTILISATION DE LA FONCTION DE REPARTITION DES DUREES DE VIE POUR L'ETUDE DES PERIODICITES	145
ANNEXE VII - TEST DE RECEPTION EN FATIGUE	153

ESSAI DE DEFINITION D'UN PROGRAMME RATIONNEL D'ETUDE
D'UN MODELE REPRESENTANT LES DUREES DE VIE EN FATIGUE

-:-:-:-:-

C H A P I T R E I

INTRODUCTION

Lorsque l'on aborde l'étude de la fatigue des métaux résultant de l'application répétée de charges variables, il apparaît immédiatement que les résultats acquis à ce jour se répartissent suivant deux domaines d'intérêt disjoints.

Tout d'abord, et cela correspond en fait à l'ordre historique, on se trouve en présence d'un grand nombre de résultats concernant l'influence d'une quantité de facteurs sur la limite de fatigue.

La limite de fatigue dont la définition ne peut être posée avec précision de façon simple est, pour en donner une idée assez vague, la charge au dessous de laquelle aucune rupture de fatigue ne se produit.

Il semble que les premières études se soient concentrées sur la variabilité de cette limite sous l'influence de tous les facteurs imaginables. L'utilisation pratique réclamait en effet pour le constructeur, la connaissance de cette limite, de même que la limite de rupture statique est essentielle en résistance des matériaux.

C'est ainsi que, en langue française, le livre de M. CAZAUD offre au lecteur les titres suivants : INFLUENCE DE DIVERS FACTEURS SUR LA FATIGUE - I.- Conditions d'application des efforts, II.- Dimension et forme des pièces, III.- Etats de surface , IV.- Sens des fibres , V.- Température , VI.- Corrosion , sans oublier les influences secondaires de chaque famille de plus en plus précises, telles que influence des trous, des filetages, de la superposition des contraintes statiques et alternatives sur l'endurance à chaud, etc ...

Malheureusement la liaison entre ces divers facteurs et la limite de fatigue n'a pu jusqu'à présent être établie sous forme d'un modèle dont chacun des paramètres représente convenablement l'influence de chacun des facteurs. On se trouve donc posséder un grand nombre de résultats dont l'utilisation pratique s'avère dans bien des cas extrêmement difficile parce que le manque de loi ne permet pas la prévision avec quelque certitude.

Une seule de ces liaisons a fait l'objet d'une étude plus approfondie parce que le besoin s'en est imposé rapidement, c'est celle de la relation entre la durée de vie et la contrainte réelle, au delà de la limite de fatigue. Elle a abouti à ce qu'on a appelé initialement la courbe de WOHLER. Si on pensait pouvoir faire travailler une structure au dessous de la limite de fatigue de même que l'on se soucie avant tout de la faire travailler au dessous de la limite élastique, le développement de l'aviation et, en particulier l'apparition d'états vibratoires tels que ceux engendrés par le "jet noise", devait démontrer que cela était difficile et même quelquefois peu souhaitable. Le problème du compromis entre le poids et la résistance peut en effet pour une sécurité donnée, imposer d'accepter une durée de vie non illimitée. Il devenait donc important d'avoir une relation entre la contrainte et la durée de vie exprimée par exemple en nombre de cycles d'application de la charge.

Toutefois, les relations mathématiques proposées jusqu'à ce jour pour représenter les résultats n'ont pas permis d'inclure l'ensemble des paramètres cités ci-dessus et ne peuvent en conséquence prétendre à la dénomination de modèle.

Le second domaine d'intérêt est l'étude des différentes représentations de la répartition des durées de vie pour une même sollicitation de la charge.

On s'est aperçu assez rapidement que toutes choses égales d'ailleurs, les résultats concernant les durées de vie en fatigue étaient extrêmement dispersés. D'où le souci de donner une représentation probabiliste de chacune des durées de vie possibles pour une catégorie d'épreuves donnée.

A noter que, encore récemment, il ne s'agissait que d'une étude entièrement empiriste des résultats. Etant donné une collection de résultats, quelle était la meilleure formule mathématique adaptée à leur représentation. Bien entendu, un certain nombre de formules a été proposé sans qu'un choix déterminé puisse être fait par cette méthode entre les concurrents. Le chapitre suivant fera le point des résultats acquis dans ce domaine.

Le caractère empirique de ces lois statistiques fait évidemment que les valeurs des paramètres qui interviennent, liées aux différents moments de la loi, ne peuvent être calculées que par une méthode statistique, ce qui exige que les essais soient répétés autant de fois qu'il y a de valeurs de la contrainte et des autres paramètres.

Il n'y a donc pas à s'étonner que les deux domaines soient jusqu'à présent disjoints.

Si l'on admet que l'on choisisse la durée de vie correspondant à une probabilité donnée pour la représenter en fonction de la contrainte, si l'on admet également qu'il faille un minimum d'une cinquantaine d'éprouvettes pour faire une statistique honnête, et qu'une courbe de WOHLER pour cette probabilité puisse être tracée avec une dizaine de points, il faudra au minimum casser 500 éprouvettes.

Une simple courbe coûte, par cette méthode, extrêmement cher étant donné la durée des essais de fatigue. De plus, si on veut avoir un réseau de courbes de WOHLER correspondant à diverses probabilités, on se trouve devant un problème dont bien peu de laboratoires oseront entreprendre la solution.

Que dire enfin, si au lieu d'une simple éprouvette, on s'intéresse à des ensembles structuraux, longerons, plans fixes d'avions, etc ..

..../

Le problème devient insoluble. Et par là même devient insoluble tout problème reposant sur la connaissance d'une loi de répartition des durées de vie tel que le problème de recherche opérationnelle, cependant classique, de la détermination des rechanges et des périodicités si on l'envisage sous l'angle de la fatigue.

A noter cependant que malgré le développement du point de vue statistique, la plupart des laboratoires qui ont à utiliser la notion de résistance à la fatigue, soit pour améliorer la qualité des matériaux, soit pour utiliser leurs caractéristiques du point de vue constructif, continuent à tracer des courbes de WOHLER sans se soucier de la dispersion des résultats.

On teste par exemple la variation de la tenue à la fatigue d'un alliage en fonction de légères modifications des constituants en traçant des courbes de WOHLER forcément voisines, avec ... trois ou quatre points à chaque niveau de contrainte ! mais il y a de nombreux niveaux. Avec un peu de chance, on aurait probablement pu, en se basant uniquement sur ce test, trouver le résultat contraire !

Quant aux éléments d'avions extrêmement coûteux, une courbe de WOHLER se trace avec ... trois ou quatre éprouvettes en tout et pour tout ! Si aucune autre méthode n'est concevable, il serait préférable très probablement de faire l'économie de ce genre d'essai.

On peut résumer cette situation en disant que l'analyse des phénomènes de fatigue a été poussée assez loin et d'une manière assez fine mais que l'effort de synthèse n'a pas fourni un modèle suffisamment pratique permettant à l'utilisateur de tenir compte des résultats acquis, ce qui lui impose de se limiter à des schémas tellement simplifiés que leur valeur est extrêmement douteuse malgré la valeur des connaissances partielles utilisées.

La conclusion s'impose d'elle même. C'est un effort de synthèse que cette étude s'efforcera de mener à bien . Ce faisant, il apparaîtra qu'un certain nombre d'essais sont nécessaires si l'on veut aboutir à un modèle convenable.

Mais à la différence des essais que l'on répète dans chaque cas particulier, ceux que nous proposerons auront pour but de dégager des lois et par conséquent devront être faits dans les meilleures conditions possibles et une fois pour toutes.

La première synthèse qui s'impose est d'unir les domaines disjoints que nous avons initialement distingués. Pour cela, il convient tout d'abord de choisir rationnellement et de vérifier expérimentalement une loi de répartition des durées de vie. La loi à laquelle nous aboutissons est une des dernières entrées dans l'arsenal de celles qui avaient été proposées empiriquement.

On y aboutit en partant des caractères physiques de la rupture en fatigue.

Cette démarche permet de donner aux paramètres de la loi de probabilité une signification physique en même temps que leur signification statistique. Ils se trouvent ainsi liés aux caractères de l'éprouvette utilisée. Cette liaison permet une extrapolation à l'élément structural complexe en partant des résultats acquis sur l'éprouvette élémentaire de laboratoire.

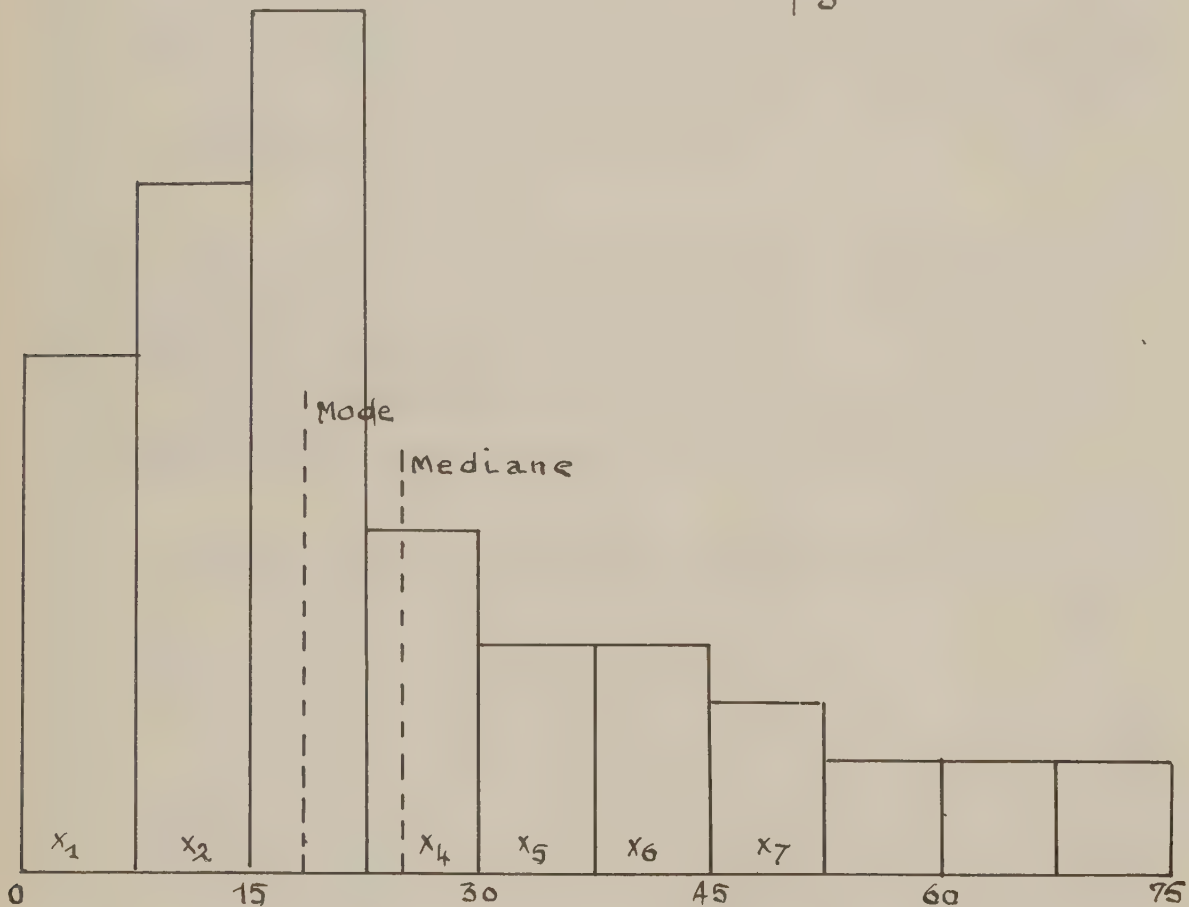
Telles sont rapidement exposées les idées qui seront développées ci-après.

Toutefois, toutes les liaisons n'ont pu être formalisées d'une façon complète parce que les résultats d'essais de fatigue qui ont été publiés ne l'ont été que dans des cas très particuliers et pour obtenir des résultats qui n'ont pas toujours de relation directe avec le modèle proposé. Une seule liaison a pu être établie au laboratoire central de SUD-AVIATION, elle est essentielle mais demanderait à être affirmée par d'autres résultats plus nombreux.

C'est cet aspect de la question qui justifie le titre donné à cette étude, car il ne peut être question, étant donné la longueur et le prix des essais de ce genre, d'aboutir de façon complète en quelques mois.

Par contre, il est facile d'établir un programme d'essais pour que les travaux futurs ne soient pas dispersés et s'efforcent d'améliorer un modèle dont la base est à la fois rationnelle, fondée sur l'expérience, et permet de regrouper les notions acquises.

fig 1



Histogramme des fréquences

(données de A.G. FUGSLEY . PROC. ROY. SOC 216. 1953)
essais de fatigue 75 S-Taluminium

CHAPITRE II

LES DIFFERENTS MODELES EXISTANTS POUR REPRESENTER LA DUREE DE VIE EN FATIGUE

1/ Caractère statistique de la durée de vie des matériaux

Supposons qu'un élément d'un matériau quelconque soit soumis à un grand nombre d'applications d'une charge à un niveau donné de la contrainte (la contrainte étant la force appliquée par unité de surface), on peut définir la durée de vie de l'élément considéré, au niveau de contrainte σ comme étant le nombre $N(\sigma)$ d'applications de la charge qu'il y a lieu d'effectuer pour obtenir la rupture de l'élément.

Le caractère aléatoire de $N(\sigma)$ pour un σ donné est un fait qui est vérifié expérimentalement. Des échantillons apparemment identiques, expérimentés dans des conditions dont l'identité est parfaitement contrôlée, ne cassent pas après un nombre de cycles identiques, mais après des nombres d'applications de la charge largement dispersés. Il y a lieu de noter que la durée de vie pourrait être exprimée dans une unité autre que le nombre de cycles, par exemple le nombre d'heures en service, ou le nombre de kilomètres parcourus. Le nombre de cycles a été choisi pour des raisons qui apparaîtront par la suite, mais il est toujours possible de passer d'une unité à l'autre.

Considérons un certain nombre $N(\sigma)$ de cycles au niveau de contrainte σ qu'un élément parcourt avant de se rompre. Pour obtenir la distribution de probabilités de $N(\sigma)$, il faut essayer un grand nombre d'éléments au niveau de contrainte σ et construire un histogramme tel que celui figurant fig. 1.

..../

L'axe des x est divisé en un certain nombre d'intervalles centrés sur les valeurs $(x_1, x_2, \dots)$ l'ordonnée représente la fraction d'éléments essayés dont les durées de vie observées sont contenues dans l'intervalle considéré. Soit $\hat{f}_i(x_i)$ la fraction d'éléments centrés sur l'intervalle x_i , on peut l'assimiler à une estimation de la probabilité que la variable aléatoire $N(s)$ ait une valeur observée dans l'intervalle centré sur x_i .

Rappelons que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X est une fonction $F(x)$ définie par la relation :

$$F(x) = \text{Prob} \{ X \leq x \}$$

Dans les applications de la fonction de répartition des durées de vie en fatigue, on rencontre également ce qu'on peut appeler la fonction de survie d'une variable aléatoire X . Soit $L(x)$ cette fonction, elle est définie par :

$$L(x) = 1 - F(x) = \text{Prob} \{ X > x \}$$

La variable aléatoire X est continue si il existe une fonction $f(x)$ appelée densité de probabilité de X telle que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi$$

ou encore :

$$\text{Prob} \{ x < X \leq x + dx \} = f(x) dx$$

Le problème qui se pose est celui d'obtenir une loi de probabilité d'une variable aléatoire $N(s)$, soit en déterminant sa fonction de répartition $F(x)$ soit sa densité de probabilité $f(x)$. A partir d'un grand nombre d'observations de $N(s)$ on peut estimer la fonction $f(x)$ en traçant une fonction continue $\hat{f}(x)$ qui soit adaptée à l'histogramme observé $\hat{f}_i(x_i)$. Ce procédé n'est pas pratique et ne donne pas une expression suffisamment approchée de la densité de probabilité.

Il est préférable de supposer que, par suite de considérations théoriques, la fonction à adapter appartient à une certaine famille de fonctions de densité de probabilité indexée par un nombre fini de paramètres. La fonction adaptée s'obtient alors en estimant la valeur des paramètres.

Nous verrons pratiquement comment ont été ajustés les paramètres de la loi qui en définitive sera retenue.

Il y a lieu de définir quelques éléments de statistiques qui seront utilisés dans la suite de cette étude.

Etant donné une variable aléatoire X , ayant une densité de probabilité $f_1(x)$, le mode, la médiane et la moyenne sont des valeurs particulières de la variable ayant une certaine probabilité tandis que la variance donne une mesure de l'intervalle dans lequel la variable a beaucoup de chance de se situer. Les définitions précises de ces concepts sont les suivants.

Le mode m_0 est le point - s'il existe - auquel la densité de probabilité $f_1(x)$ atteint son maximum.

La médiane est le point où la fonction de répartition $F_1(x)$ est égale à $1/2$.

La moyenne est définie par la relation :

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx$$

et la variance σ^2 est définie par la relation :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f_1(x) dx$$

2/ Quelques unes des lois proposées

Les plus importantes des lois qui ont été proposées pour représenter la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire sont les suivantes :

.../

1. La loi logarithmo-normale
2. La distribution des valeurs extrêmes
3. La distribution de Weibull
4. La distribution Gamma, ou loi de Pearson type III .

Toutes ces distributions ont un caractère commun, celui d'être dissymétriques, de la même façon que l'histogramme de la fig. 1.

Une variable aléatoire X qui ne prend que des valeurs positives est dite avoir une distribution logarithmo-normale de paramètres μ et σ (où μ et σ sont des constantes réelles telles que $-\infty < \mu < +\infty$ et $\sigma > 0$) si sa fonction de densité de probabilité est donnée par :

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \log x - \mu \right\}^2 \right] & x > 0 \\ = 0 & x < 0 \end{cases}$$

La loi logarithmo-normale prend son nom dans le fait qu'une variable aléatoire X est distribuée suivant cette loi, si et seulement si $\log X$ est normalement distribué de moyenne μ et de variance σ^2 .

Une variable aléatoire X de distribution logarithmo-normale a :

$$(2) \quad \begin{cases} \text{mode} : & e^{\mu - \sigma^2} \\ \text{médiane} : & e^{\mu} \\ \text{moyenne} : & e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \\ \text{variance} : & e^{2\mu + \sigma^2} [e^{\sigma^2} - 1] \end{cases}$$

On se reportera à la référence 2 pour une étude complète de cette loi .

Une variable aléatoire X est dite avoir une distribution de valeurs extrêmes de paramètres u et β (où u et β sont des constantes telles que : $-\infty < u < +\infty$; $\beta > 0$ si la fonction de répartition est donnée par :

$$(3) \quad F(x) = 1 - \exp \left\{ -e^{-\frac{x-u}{\beta}} \right\}$$

.... /

ou bien sa fonction de densité de probabilité par :

$$(4) \quad f(x) = \exp \left\{ - \left(\frac{x-u}{\beta} \right) e^{-\left(\frac{x-u}{\beta} \right)} \right\}$$

Les valeurs typiques de cette distribution sont :

$$(5) \quad \begin{cases} \text{mode : } u \\ \text{médiane : } u + (0,36651)\beta \\ \text{moyenne : } u + (0,57722)\beta \\ \text{variance : } \frac{\pi}{\sqrt{6}} \beta \end{cases}$$

On se reportera pour une étude de cette loi au livre de E.J. Gumbel cité en référence 3 .

Une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs plus grandes qu'un certain nombre ε , est dite avoir une distribution de Weibull de paramètres v et K (où $v \geq \varepsilon$ et $K > 1$) si la fonction de répartition est donnée par :

$$(6) \quad \begin{cases} F(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x-\varepsilon}{v-\varepsilon} \right)^K \right\} & \text{pour } x \geq \varepsilon \\ = 0 & \text{pour } x < \varepsilon \end{cases}$$

ou bien si sa fonction de densité de probabilité est donnée par :

$$(7) \quad f(x) = \frac{K}{v-\varepsilon} \left(\frac{x-\varepsilon}{v-\varepsilon} \right)^{K-1} \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{x-\varepsilon}{v-\varepsilon} \right)^K \right\}$$

Cette fonction a les valeurs typiques suivantes :

$$(8) \quad \begin{cases} \text{mode : } \varepsilon + (v-\varepsilon) \left(1 - \frac{1}{K} \right)^{1/K} \\ \text{médiane : } \varepsilon + (v-\varepsilon) (\log 2)^{1/K} \\ \text{moyenne : } \varepsilon + (v-\varepsilon) \Gamma \left(1 + \frac{1}{K} \right) \\ \text{variance : } (v-\varepsilon)^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{K} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{K} \right) \right] \end{cases}$$

..../

ou $\Gamma(x)$ est la fonction gamma (définie ci-après par l'équation 10) Pour ξ et V fixés, le mode, la médiane et la moyenne de cette distribution tendent vers V lorsque $K \rightarrow \infty$. Par conséquent on peut prendre comme paramètre typique de la loi de Weibull le paramètre V plutôt que le mode, la médiane ou la moyenne.

On se reportera à la référence 4 pour une étude approfondie de cette loi.

Une variable aléatoire $\bar{X}$ qui ne prend que des valeurs positives, est dite avoir une distribution Gamma (ou Pearson type III) de paramètres τ et λ (où $\tau = 1, 2, 3, \dots$ et λ est une constante positive) si la fonction de densité de probabilité est donnée par :

$$(9) \quad \begin{cases} f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\tau)} (\lambda x)^{\tau-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ = 0 & x < 0 \end{cases}$$

où la fonction $\Gamma(\tau)$ est la fonction Gamma d'Euler définie par :

$$(10) \quad \Gamma(\tau) = \int_0^{\infty} x^{\tau-1} e^{-x} dx$$

Si τ est un entier positif $\Gamma(\tau) = (\tau-1)!$. Les valeurs typiques sont :

$$(11) \quad \begin{cases} \text{mode :} & \frac{\tau-1}{\lambda} \\ \text{médiane :} & \frac{C(\tau)}{\lambda} \\ \text{moyenne :} & \frac{\tau}{\lambda} \\ \text{variance :} & \frac{\tau}{\lambda^2} \end{cases}$$

où $C(\tau)$ est solution de :

$$\int_0^{C(\tau)} y^{\tau-1} e^{-y} dy = \frac{1}{2} \Gamma(\tau) \quad (12)$$

.../

3/ Schémas probabilistes justifiant ces lois

Plusieurs modèles peuvent être à l'origine d'une loi logarithmo-normale, et on peut en trouver la description dans la référence 2 précédemment citée. Le plus important de ces modèles est celui de la "théorie des effets proportionnels" qui fut proposée pour la première fois en 1903 par KAPTEYN. Soit $X_1, X_2 \dots X_n$ une séquence de variables aléatoires représentant la valeur, en des intervalles de temps successifs, d'éléments tels que : la dimension d'un organisme biologique, d'un spécimen géologique, ou bien d'une fissure de fatigue. Supposons que chaque valeur X_n soit reliée à la précédente par la relation suivante :

$$(13) \quad X_n - X_{n-1} = \varepsilon_n X_{n-1}$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Autrement dit la variation $X_n - X_{n-1}$ à chaque étape du développement du processus étudié est une proportion aléatoire ε_n de la valeur précédente de la variable aléatoire X_{n-1} .

De (13) il découle que :

$$(14) \quad X_n = (1 + \varepsilon_n) X_{n-1} = (1 + \varepsilon_n)(1 + \varepsilon_{n-1}) \dots (1 + \varepsilon_1) X_1$$

Cette relation montre que pour n grand, X_n est le produit d'un grand nombre de facteurs indépendants, par conséquent son logarithme: $\log X_n$ est la somme d'un grand nombre de termes indépendants, dont aucun n'est prédominant. Les lois asymptotiques de l'addition des variables aléatoires indépendantes permettent d'affirmer que $\log X_n$ est approximativement normalement distribué d'où il s'ensuit que X_n suit une loi logarithmo-normale.

..../

L'application de cette distribution à la fatigue a été étudiée par Freudenthal et Gumbel (référence 4). Soit $S_1, S_2, \dots, S_K$ des contraintes successives appliquées aux cycles $1, 2, \dots, K$. Soit A_n la surface rompue à l'intérieur de l'élément après l'application des n premiers cycles. Si on suppose que la loi de l'effet proportionnel s'applique

$$(15) \quad A_K - A_{K-1} = S_K A_{K-1}$$

alors la dimension de A_n après n cycles est approximativement distribuée suivant une loi logarithmo-normale

Toutefois, si on est intéressé surtout par le nombre $N(\delta)$ de cycles jusqu'à la rupture, il semble que la distribution de $N(S)$ soit, du moins d'un point de vue théorique, mieux représentée par une loi de valeurs extrêmes, ou une loi de Weibull, plutôt que par une loi logarithmo-normale.

La distribution des valeurs extrêmes se présente de la façon suivante. Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite d'observations indépendantes d'une variable aléatoire X . Posons $Y_1 = X_1$, $Y_2 = \max(X_1, X_2)$, $\dots$, $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et soit $Z_1 = X_1$, $Z_2 = \min(X_1, X_2)$, $\dots$, $Z_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Les variables aléatoires Y_n et Z_n sont les valeurs extrêmes (maximum et minimum) de l'échantillon d'observations indépendantes

La distribution asymptotique, c'est-à-dire la distribution pour des valeurs assez grandes de n , de Y_n , Z_n peut prendre plusieurs formes suivant la forme qu'a celle de la variable origine X_n . Une discussion complète peut être trouvée dans le livre de GUMBEL cité en réf. 3.

Ce que l'on a appelé la distribution des valeurs extrêmes est appelée plus précisément par GUMBEL la distribution asymptotique des valeurs extrêmes de type I. Ce que l'on a appelé la distribution de Weibull est appelée par GUMBEL une distribution asymptotique de valeurs extrêmes de type III.

Il y a lieu de remarquer que si l'on connaît la distribution exacte des observations indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$, on peut alors écrire une expression exacte de la distribution de leurs valeurs extrêmes. Ce qui est intéressant dans la théorie des valeurs extrêmes est qu'elle fournit une méthode d'évaluation approchée avec un minimum d'hypothèses, de la distribution des valeurs extrêmes à partir d'un échantillon.

EPSTEIN (référence 5) et FREUDENTHAL et GUMBEL (réf. 6) ont analysé les hypothèses physiques qui doivent être réalisées pour que l'on puisse espérer que la résistance à la rupture d'un matériau soit distribuée soit suivant une loi de Weibull, soit suivant une loi de valeurs extrêmes. En résumé, les hypothèses portent sur le fait que la résistance à la rupture d'une éprouvette est déterminée par les défauts les plus accentués parmi tous les défauts existant en grand nombre dans le métal.

On suppose que ces défauts sont répartis au hasard dans le matériau. La dimension des défauts est supposée obéir à une distribution de probabilité d'un type convenable pour l'application de la théorie asymptotique des valeurs extrêmes.

Ces deux distributions peuvent également être déduites d'un autre point de vue, basé sur la notion du taux de mortalité.

Soit T une variable aléatoire représentant la durée de service jusqu'à l'arrêt d'un équipement donné. Soit $T'(x)$ la fonction de répartition de T et $f(x)$ sa distribution de probabilité. On définit une fonction $\mu(x)$ appelée le taux de mortalité, par la relation :

$$(17) \quad \mu(x) = \frac{f(x)}{1 - T'(x)}$$

Cette relation traduit le fait que $\mu(x)$ est la probabilité conditionnelle pour qu'un élément donné meurt entre x et $x+dx$ sachant qu'il a déjà atteint le temps T plus grand que x .

Pour une fonction $\mu(x)$ donnée la fonction de distribution correspondante est :

$$(18) \quad 1 - F(x) = [1 - F(x_0)] \exp \left\{ - \int_{x_0}^x \mu(z) dz \right\}$$

où x_0 est une valeur arbitraire de x puisque (17) peut s'écrire :

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial x} [1 - F(x)] = -\mu(x)$$

Si on a $F(\varepsilon) = 0$ alors

$$(20) \quad 1 - F(x) = e^{-\int_{\varepsilon}^x \mu(z) dz} \quad x > \varepsilon$$

La distribution des valeurs extrêmes correspond à une fonction :

$$(21) \quad \mu(t) = \frac{1}{\beta} e^{\frac{t-\varepsilon}{\beta}} \quad \varepsilon = -\infty$$

La distribution de Weibull correspond à une fonction :

$$(22) \quad \mu(t) = K \left(\frac{t-\varepsilon}{V-\varepsilon} \right)^{K-1}$$

Ce schéma peut également être modifié de telle façon que l'on obtienne un modèle aboutissant à une distribution qui soit une fonction Gamma. C'est ce qui a été fait par Birnbaum et Saunders dans la référence 7. Leurs hypothèses de base consistent à définir une fonction de détérioration telle que le taux de mortalité soit égal à :

$$\omega(t) \delta(t)$$

où $\delta(t)$ est une fonction non négative représentant le dommage instantané de la structure et $\omega(t)$ a pour dérivée $\omega'(t)$ qui est la détérioration du composant. Ce schéma a pour but de séparer les causes de rupture en deux : celles qui sont dues à la charge et celles qui sont indépendantes de la charge, cumulatives avec le temps telles que la corrosion par exemple.

.../

4/ Critique des schémas .

Les schémas utilisés pour obtenir une formulation mathématique de la loi de probabilité, présentent tous un même défaut qui rend difficile le choix du meilleur d'entre eux. Il semble que dans tous les cas, on ait essayé d'utiliser un modèle mathématique déjà existant en essayant d'arranger la réalité physique pour l'adapter à la structure d'un modèle mathématique.

Dans le premier, il faut que la surface rompue soit proportionnelle à celle qui va se rompre, dans les autres, il faut que le nombre de variables envisagées soit très grand (lois asymptotiques), que les défauts présents dans le matériau aient des dimensions obéissant à une loi de probabilité donnée, ou bien que le taux de mortalité ait une forme mathématique posée a priori. Dans aucun de ces cas, la vérification expérimentale des hypothèses n'est possible autrement que par la bonne adaptation empirique de la formule finale à l'ensemble des résultats. ce qui rend pratiquement inutile toute théorie tendant à justifier la forme du schéma retenu. Par là même, le choix entre plusieurs formules dont l'approximation dans de nombreux cas est de qualité équivalente devient difficile.

Le caractère commun des hypothèses envisagées ci-dessus est d'être trop restrictif parce que faisant intervenir une caractéristique physique très particulière : dimension d'une surface élémentaire, répartition de criques élémentaires, variation d'une fonction d'endommagement mal définie, etc ... caractéristiques qui ne peuvent être mesurées directement.

Dans l'étude qui va suivre, nous abandonnerons ces hypothèses trop restrictives et supposerons simplement que le développement d'une fissure se fait suivant un processus poissonnien. cette hypothèse ne résulte pas directement d'une théorie physique mais elle est suggérée par la théorie et semble compatible avec les théories physiques de la fatigue.

..../

En particulier, nous verrons que la théorie de GRIFFITH et celles qui ont tenté de l'améliorer ne lui sont pas opposées.

Cette hypothèse est par contre directement vérifiable par un essai de fatigue et l'expérience en a confirmé le bien fondé comme il sera exposé par la suite.

Partant de ce résultat, il est possible par un raisonnement classique d'en déduire la loi de répartition des durées de vie et l'on aboutit à une loi Gamma ou de Pearson type III.

C H A P I T R E I I I

LA THEORIE DE GRIFFITH

-:-:-:-

1/ Théorie de GRIFFITH

L'existence des amorce de fissures, à la surface ou à l'intérieur des corps solides est, comme on le sait, la raison de la faible résistance des corps solides comparée à la résistance théorique qui peut être calculée à partir de la théorie des forces de liaison moléculaires.

Selon la théorie de GRIFFITH (Référence 8) en présence d'une fissure la tension se répartit sur les bords de la fissure suivant une "surtension". Lorsque cette tension augmente et qu'elle atteint une valeur correspondant à la résistance à la rupture du matériau, la fissure commence à augmenter par à-coups comme si le matériau se fendait.

La théorie de GRIFFITH est habituellement présentée sous une forme quelque peu différente, à partir de la notion d'énergie potentielle de l'élément considéré, ou plus exactement à partir de la variation de cette énergie qu'entraîne une fissuration de longueur donnée. Si on considère le problème sous deux dimensions, cette variation d'énergie selon GRIFFITH et d'autres auteurs, peut s'exprimer par la formule :

$$(23) \quad U = - \frac{\overline{T}^2 l^2}{2E} + 2 \sigma l$$

- où - l est la longueur de la fissure ,
 - $\overline{T}$ est la valeur moyenne de la force de traction en l'absence de fissure ou à une grande distance de celle-ci ,
 - E est le module d'Young ,

:..../

- σ la tension superficielle ,
- U est la diminution d'énergie due à la formation d'une fissure de longueur l pendant la séparation des deux bords de la fissure .

Le second membre représente une énergie en faisant l'hypothèse que les deux bords de la fissure sont séparés par une distance telle que les forces de liaison moléculaires puissent être négligées. La courbe $U(l)$ est une parabole pour une valeur donnée de $\overline{F}$. Le maximum correspond à la valeur critique du paramètre $\overline{F}_K = \overline{F}(l_K)$ auquel un agrandissement futur de la crique deviendra possible .

Pour : $\frac{\partial U}{\partial l} = 0$ on a : $\overline{F}_K = \sqrt{\frac{2\sigma E}{l_K}}$ (24)

Lorsque $\overline{F}_K$ croît l_K diminue. Dans la théorie de GRIFFITH la fissure est un trou de forme elliptique ayant un grand axe égal à l et un demi petit axe proportionnel à la valeur moyenne $\overline{F}$ de la force appliquée. La valeur de la force appliquée au bout du grand axe est inversement proportionnelle au rayon de courbure δ de l'ellipse et l'on a :

$$(25) \quad \overline{F}_0 = \overline{F}_K \sqrt{\frac{l_K}{\delta}}$$

Pour que $\overline{F}_0$ soit fini, il faut que le rayon de courbure δ soit également fini.

Si l'on suppose, selon la conception moléculaire de la structure des solides, que la valeur minimum du rayon de courbure de la fissure doit être de l'ordre de grandeur de la distance entre deux atomes ou molécules voisins, on a : $\delta = 10^{-8}$ cm, de plus si la contrainte théorique est identifiée à la valeur du module d'Young E , ce qui correspond à la théorie électronique des forces de liaison moléculaires, si enfin on tient compte de ce que la contrainte superficielle est de l'ordre de grandeur du produit du module E par δ la valeur de $\overline{F}_0$ obtenue par la formule (25) est pratiquement identique à celle que l'on obtient par la formule (24).

..../

2/ Critique de cette théorie

La théorie de GRIFFITH n'est pas entièrement satisfaisante, à la fois dans son principe et dans son accord avec les faits expérimentaux. Mais elle a été améliorée par Y.I. FRENKEL (référence 9) de la façon qui sera exposée ci-après.

Considérons une fissure dont la longueur initiale soit supposée plus faible que l_K . Selon la théorie de GRIFFITH appliquée intégralement, la fissure devrait se fermer spontanément et finalement disparaître. Pour palier cette difficulté GRIFFITH suppose que pour une force T donnée plus petite que T_K à laquelle correspond une fissure $l = l_K$ la longueur ne change pas jusqu'à un instant ultérieur.

Notons au passage le caractère aléatoire ainsi introduit du processus d'agrandissement de la crique et même la forme discrète de ce processus.

Le défaut de la théorie de GRIFFITH tient au fait que la courbe $U(l)$ pour $T < T_K$ n'a qu'un seul extremum correspondant au maximum d'énergie, c'est-à-dire à un état instable de l'élément sous une traction donnée. Cette circonstance lui enlève toute signification physique.

Dans le même ordre d'idées, pour rendre à la théorie une signification physique convenable, il serait nécessaire d'établir une relation entre U et l , telle que, à chaque maximum pour $l = l''$ corresponde un minimum l' qui soit un état stable du matériau étudié. Une telle relation pourrait être représentée par une courbe analogue à celle de la fig. 2. Des courbes de ce type, ont été obtenues expérimentalement par OBREIMOFF en rompant des plaques de mica suivant des plans de clivage (référence 10).

..../

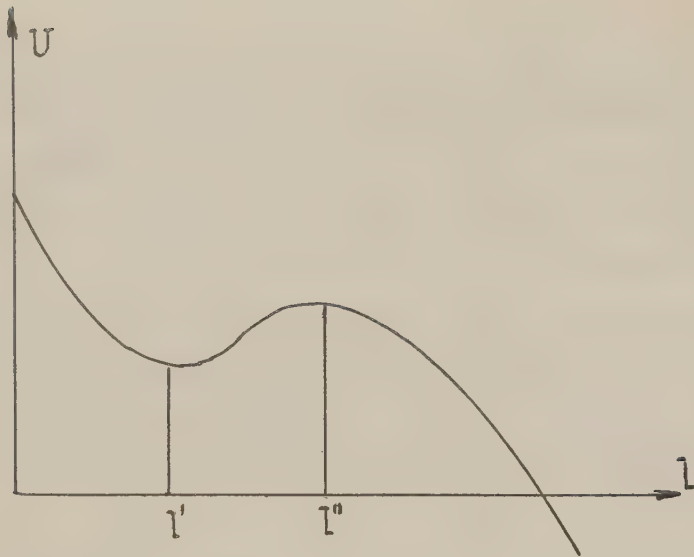


fig 2

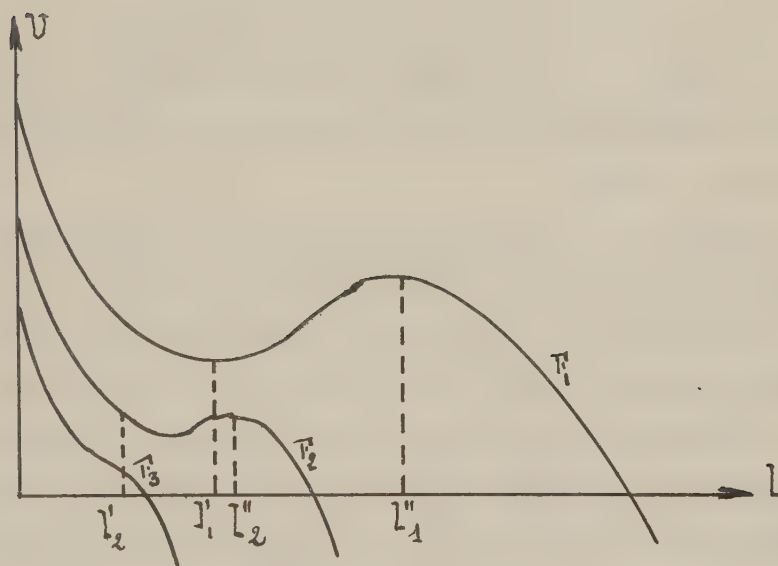


fig 3

En outre les fissures qui se forment dans un solide, n'ont pas des bords arrondis, mais aigus comme si les surfaces se rejoignaient asymptotiquement jusqu'à la distance δ . Toutefois, il y a fissure si la distance devient égale à $\delta + y$ où y est plus grand que δ . Bien que dans ces conditions la longueur de la fissure soit infinie pratiquement, on peut supposer que la fissure réelle se termine lorsque la distance entre ses bords devient égale par exemple à deux fois la distance δ . Soit $y = \delta$

Une définition moins arbitraire et physiquement mieux justifiée de la longueur de la fissure peut être obtenue en considérant l'interaction entre les deux bords de la fissure à une distance $y + \delta$. Soit $f(y)$ cette force. Pour des valeurs suffisamment petites de y comparé à δ , cette force sera évidemment proportionnelle à y se réduisant à une attraction si $y > 0$ et à une répulsion si $y < 0$. Cette dépendance peut s'exprimer par la formule :

$$(26) \quad f = \frac{E}{\delta} y$$

Puisque pour des valeurs de y beaucoup plus grandes que δ cette force est nulle, il existe une valeur de $y = y^*$ pour laquelle la force f atteint un maximum f^* , que l'on peut identifier avec la résistance théorique du matériau à la rupture.

De plus, puisque y^* est voisin de δ , f^* est voisin de E comme cela apparaît sur la formule (26).

Par contre, pour $y > y^*$ cette formule devient incorrecte. Dans ce cas on peut utiliser la formule :

$$(27) \quad f = A y e^{-\alpha y} \quad \text{où} \quad A = \frac{E}{\delta}$$

et le coefficient α est égal à l'inverse de y^* . On peut, pour simplifier, prendre $\alpha = \frac{1}{\delta}$.

En intégrant f par rapport à y entre 0 et ∞ on obtient le travail nécessaire pour séparer l'objet considéré en deux parties c'est à dire deux fois l'énergie superficielle donc :

$$2 \sigma_0 = \int_0^{\infty} f dy$$

Si on prend comme mesure de l'énergie superficielle la valeur de cette intégrale pour une valeur finie de $y = y_1$, on a :

$$2 \sigma(y_1) = \int_0^{y_1} f dy$$

dans le cas de la formule (27) on a :

$$(28) \quad 2 \sigma(y_1) = \frac{A}{\alpha^2} \left[1 - (y_1 \alpha + 1) e^{-\alpha y_1} \right]$$

pour $y_1 \rightarrow \infty$ cette expression a pour limite $2 \sigma_0 = \frac{A}{\alpha^2}$

Par conséquent, comme $A = \frac{E}{\delta}$ c'est-à-dire $\frac{A}{\alpha} = E$

on a : $\sigma_0 = \frac{1}{2} E \delta$

ce qui, en pratique, représente bien la relation entre forces de surface et de rupture. De façon plus précise, on a :

$$f^* = \frac{A}{\alpha} e = E e = 2,72 E$$

Cette précision est par ailleurs illusoire, parce que la formule (27) a un caractère très approximatif du même ordre que l'identification de $y^* = \frac{1}{\alpha}$ avec δ

Si on considère la partie de la crique où y est petit, on peut représenter l'énergie superficielle par l'expression :

$$2 \int_0^y f dy = 2 \frac{E}{\delta} \int_0^y y dy = \frac{E}{\delta} y^2$$

L'énergie prise depuis $\alpha = 1$ à $\alpha = \infty$ a donc pour expression :

$$(29) \quad U = \frac{E}{\delta} \int_1^{\infty} y^2 dx$$

..../

3/ Relation entre la longueur de fissure et la valeur de la force appliquée.

Imaginons une plaque horizontale de dimension infinie séparée en deux sous l'effet de deux forces opposées $\pm T$ appliquées perpendiculairement à son plan. Soit $2b$ l'épaisseur que nous supposons petite par rapport à la longueur l de la fissure en formation. Pour déterminer l en fonction de T on assimile chaque moitié de plaque identique à une poutre fléchie en équilibre sous l'action d'une force concentrée à son extrémité et de forces de surface distribuées le long de la poutre et atteignant leur valeur maximum à la distance l .

Dans ces conditions la forme de la poutre est donnée par l'équation différentielle :

$$(30) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

où y est le déplacement, E le module d'Young, $I = \frac{b^3}{3}$ est le moment d'inertie de la section plane, et M le moment des forces appliquées par rapport au point $x = 0$. L'expression de M est la suivante :

$$(31) \quad M = T x - \int_0^x f \xi d\xi$$

L'équation 30 est alors équivalente à l'équation du troisième ordre :

$$(32) \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{EI} (T - f x)$$

où f est une fonction de y déterminée par la formule (27).

On peut trouver une solution de cette équation de façon approchée en tenant compte de ce que pour les grandes valeurs de x la dérivée $\frac{d^3 y}{dx^3}$ est voisine de zéro. On peut alors poser : $f = A y$ $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{E}{\delta} y = \frac{T}{\alpha}$, et la fonction y de x dans cette partie s'exprime par la formule asymptotique :

$$(33) \quad y = \frac{T}{E} \cdot \frac{\delta}{\alpha}$$

.../

En fait de (33) on peut tirer $\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{6 P \delta}{E} \cdot \frac{1}{x^4}$ ce qui donne pour y l'expression

$$(34) \quad y = \frac{P \delta}{E x} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\delta b^3}{x^4} \right)$$

où figure un terme correctif que l'on négligera par la suite.

On peut également obtenir le résultat précédent en utilisant la condition d'énergie totale maximum du système considéré.

Cette énergie U comprend trois termes ; U_1 l'énergie élastique de la partie externe traitée comme une poutre de longueur L avec une force P appliquée à l'extrémité libre, U_2 l'énergie superficielle de la partie ouverte de la fissure :

$$U_2 = 2 \sigma_0 L$$

et U_3 l'énergie de l'amorce de fissure correspondant à $x > L$

Pour U_3 on peut utiliser la formule (29) et la formule (33) ce qui donne :

$$(35) \quad U_3 = \frac{\delta P^2}{E} \int_L^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{\delta P^2}{E L}$$

U_1 a pour expression $U_1 = \frac{1}{2} P y_0$ où y_0 est la déflection maximum c'est-à-dire la valeur de y pour $x = 0$.

On a pour y_0 la formule approchée

$$y_0 = \frac{L^3 P}{3 E I}$$

obtenue en intégrant l'équation (30) dans laquelle $M = P x$ avec les conditions $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = L$

Dans ces conditions U a approximativement la forme :

$$(36) \quad U = -\frac{P^2 L^3}{6 E I} + 2 \sigma_0 L + \frac{P^2 \delta}{E L}$$

..../

La figure III montre une famille de courbes $U(l)$ correspondant à diverses valeurs de T' (isodynnes) la force de séparation. Pour une valeur pas trop élevée la courbe a deux extrémités : un minimum pour $l = l'$ et un maximum pour $l = l'' > l'$. En augmentant T' ces deux points se rapprochent et ils sont confondus pour une certaine valeur de $T' = T'_c$ (point critique).

Pour $T' \ll T'_c$ on a : $l' = T' \sqrt{\frac{\delta}{2E\sigma_0}}$ (37)

et puisque $\sigma_0 = \frac{E\delta}{2}$ $l' = \frac{T'}{E}$ (38)

Cette valeur correspond à une valeur stable, c'est-à-dire au minimum de l'énergie potentielle U .

La valeur maximum de U correspond à un équilibre instable pour laquelle la longueur de la fissure ayant atteint une certaine dimension $l'' > l'$ peut, sous l'action de la plus légère perturbation, soit revenir à la valeur $l = l'$ ou bien augmenter d'un seul coup.

Cette incertitude sur le sens de la transformation de grandeur finie ayant pour cause une action très petite, introduit de façon très évidente le caractère aléatoire du phénomène bien que l'étude ci-dessus n'ait considéré à aucun moment cet aspect du problème.

C H A P I T R E I V

LA PROPAGATION DE LA FISSURE : PROCESSUS POISSONNIEN

-:-:-:-

La théorie de GRIFFITH, améliorée par FRENKEL, a laissé entrevoir le caractère aléatoire de la propagation d'une fissure. D'après M. CAZAUD (réf. citée p. 79) on peut admettre avec GILCHRIST (référence II) "que la résultante des efforts appliqués variables et des efforts secondaires de concentration de contrainte peut dépasser localement la résistance de cohésion du métal. Une crique microscopique en résulte, et c'est l'origine de la rupture par fatigue. Cette crique, une fois amorcée, se propage au sein du métal d'autant plus rapidement que les efforts sont plus importants et plus nombreux. "

La composition des efforts appliqués et des contraintes locales internes est évidemment impossible à prévoir et le caractère aléatoire du développement de la fissure est évident. En outre, nous avons vu que ce développement se faisant de manière discontinue, addition d'une microfissure à la fissure déjà existante, s'effectuait d'une façon quasi instantanée. Il s'agit donc d'un processus ponctuel. Il est évident, dans ce cas particulier, que les apparitions de microfissures sont indépendantes du temps et que deux fissures élémentaires ne peuvent se produire que successivement. La seule condition qui ne soit pas évidente est l'indépendance de deux événements successifs. Ce fait a pourtant été expérimentalement mis en évidence. Dans une étude (référence 12) sur le taux d'accroissement des criques de fatigue, M. WEIBULL a constaté que le taux d'accroissement était indépendant de la longueur de la fissure.⁽¹⁾ Toutes les conditions sont donc favorables au caractère poissonnien du processus.

.../

1) L'expérience a été faite à contrainte constante. Mais il s'agit ici d'un caractère qualitatif, donc indépendant de la valeur de la contrainte qui peut être considérée comme constante sur un Δt assez grand .

Soit alors K le nombre de microfissures apparaissant pendant un intervalle de temps $(0, t)$.

Nous désignerons par $P_K(t)$ la probabilité que, exactement K fissures se soient produites pendant cet intervalle de temps.

$P_0(t)$ sera donc la probabilité qu'il ne se soit rien passé pendant cet intervalle et $1 - P_0(t)$ la probabilité qu'il se soit produit au moins une microfissure. L'hypothèse d'homogénéité permet d'affirmer que $\frac{1 - P_0(t)}{t} \rightarrow \lambda$ constante positive, lorsque $t \rightarrow 0$.

Le processus de POISSON par hypothèse est tel que, quelque soit le nombre de changements intervenus entre 0 et t la probabilité que durant $(t, t+h)$ un changement intervienne est $\lambda h + o(h)$, $o(h)$ étant d'un ordre de grandeur plus petit que h .

Ces conditions conduisent à un système d'équations différentielles pour $P_K(t)$.

Considérons en effet les deux intervalles contigus $(0, t)$ et $(t, t+h)$ où h est petit.

Soit $K > 1$. Dans l'intervalle $(0, t+h)$ il peut se produire exactement K microfissures et cela de trois manières mutuellement exclusives :

- 1°/ Pas de microfissures dans l'intervalle $(t, t+h)$
 K " " " " $(0, t)$
- 2°/ 1 microfissure dans l'intervalle $(t, t+h)$
 $K-1$ " " " " $(0, t)$
- 3°/ $\alpha \geq 2$ microfissures dans l'intervalle $(t, t+h)$
 $K-\alpha$ " " " " $(0, t)$

..../

D'après les hypothèses faites, la probabilité qu'il se produise

K microfissures de 0 à t est $P_K(t)$ et celle qu'il ne s'en produise aucune pendant $(t, t+h^k)$ est $1 - \lambda h - o(h)$

La probabilité de la première manière est donc :

$$[1 - \lambda h - o(h)] P_K(t)$$

De même, la probabilité de la seconde manière est :

$$[\lambda h + o(h)] P_{K-1}(t)$$

Enfin, par hypothèse la troisième manière a pour probabilité $o(h)$

On a donc : $P_K(t+h) = P_K(t) [1 - \lambda h] + P_{K-1}(t) \lambda h + Q(t) o(h)$

$$\text{soit : } \frac{P_K(t+h) - P_K(t)}{h} = -\lambda P_K(t) + \lambda P_{K-1}(t) + Q(t) \frac{o(h)}{h}$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, le dernier terme tend vers 0 et on a la relation :

$$(39) \quad P'_K(t) = -\lambda P_K(t) + \lambda P_{K-1}(t)$$

Au début du processus pour $K=0$, la seconde et la troisième manières envisagées ci-dessus, ne se produisent pas. On a simplement

$$P_0(t+h) = P_0(t) [1 - \lambda h - o(h)]$$

soit :

$$(40) \quad P'_0(t) = -\lambda P_0(t)$$

Remarquons que $P_0(0) = 1$.

La probabilité qu'il n'y ait pas de fissures apparaissant au temps 0 est 1 .

L'équation (40) donne immédiatement :

$$(41) \quad P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

..../

En substituant $P_0(t)$ dans (39) où on fait $K = 1$, on a une équation différentielle donnant $P_1(t)$. Comme au temps 0 il ne se produit aucune fissure $P_1(0) = 0$ la probabilité qu'il apparaisse une fissure au temps 0 est nulle.

On a immédiatement

$$(42) \quad P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Le même procédé peut être utilisé de proche en proche jusqu'à K et l'on trouve

$$(43) \quad P_K(t) = \frac{(\lambda t)^K}{K!} e^{-\lambda t}$$

qui est une distribution de Poisson.

$P_K(t)$ est la probabilité qu'il y ait exactement K fissures élémentaires apparaissant dans l'intervalle de temps $(0, t)$.

Dans les essais de fatigue la charge est appliquée de façon périodique et le temps se mesure en nombre de cycles. Soit f la fréquence de l'application de la charge, et N le nombre de cycles on a :

$$(44) \quad t = \frac{N}{f}$$

Une propriété connue de la loi de Poisson est que la valeur moyenne de K est λt . λ représente par conséquent le nombre moyen de microfissures se produisant dans l'unité de temps. Si on pose $\lambda = \frac{1}{\alpha}$, α , représentera la période moyenne d'apparition d'une microfissure.

On a ainsi une signification physique des paramètres intervenant dans la formule (43).

Le processus de Poisson est tel que pour un temps t donné le nombre K de microfissures apparues de 0 à t est distribué suivant une loi de Poisson donnée par la formule (43).

.../

En présence de résultats expérimentaux, on pourrait, pour chaque instant, le nombre K de microfissures étant proportionnel à la longueur de la fissure à cet instant, effectuer un test du χ^2 pour vérifier que la distribution de K peut être représentée par une loi de Poisson.

Il est préférable d'opérer globalement suivant un test indiqué par M. FORTET (Réf. 13).

Supposons que l'expérience nous ait fourni sur un intervalle de temps $(0, T)$ une suite d'instants $t_1, t_2 \dots t_n$ pour un nombre K donné.

Considérons les intervalles succesifs :

$$l_1 = t_1, \quad l_2 = t_2 - t_1, \quad \dots \quad l_n = t_n - t_{n-1}$$

On peut classer les l_i par ordre de grandeur, il suffit de construire le diagramme donnant le logarithme népérien d'un nombre N d'intervalles supérieur à une valeur ℓ donnée en fonction de ℓ . Les points doivent se répartir approximativement suivant une droite.

Supposons en effet que l'on soit en présence d'un processus de Poisson de densité α (ici $\alpha = \lambda$). Supposons également que l'on considère n intervalles successifs. Le nombre de ces intervalles de longueur supérieur à ℓ est une variable aléatoire N . Le calcul de son espérance mathématique et de son écart type donne :

$$(45) \quad \begin{cases} E(N) = n e^{-\alpha \ell} \\ \sigma_N = \sqrt{n e^{-\alpha \ell} (1 - e^{-\alpha \ell})} \end{cases}$$

On en tire :

$$(46) \quad \text{Log } E(N) = \text{Log } n - \alpha \ell$$

Si on construit la droite Δ passant par le point $(0, \text{Log } n)$ et représentant le mieux possible le nuage de points expérimentaux, on a une évaluation possible de α , que l'on identifie avec la pente de la droite Δ .

La deuxième relation (45) fournit σ_N . Si n est grand et si ℓ n'est pas très grand $\frac{\sigma_N}{E(N)}$ est petit.

On peut donc écrire :

$$\text{Log} [E(N) + \sigma_N] = \text{Log} E(N) + \text{Log} \left[1 + \frac{\sigma_N}{E(N)} \right] \approx \text{Log} E(N) + \frac{\sigma_N}{E(N)}$$

Soit

$$(47) \quad \text{Log} [E(N) \pm \sigma_N] = \text{Log} E(N) \pm \sqrt{\frac{1 - e^{-a\ell}}{n e^{-a\ell}}}$$

On peut tracer les courbes γ_1 et γ_2 qui représentent les fonctions $\text{Log} [E(N) + \sigma_N]$ et $\text{Log} [E(N) - \sigma_N]$. Si les points expérimentaux ne s'écartent pas trop du domaine compris entre ces deux courbes, on peut dire qu'il est raisonnable de considérer que l'on a à faire à un processus de Poisson.

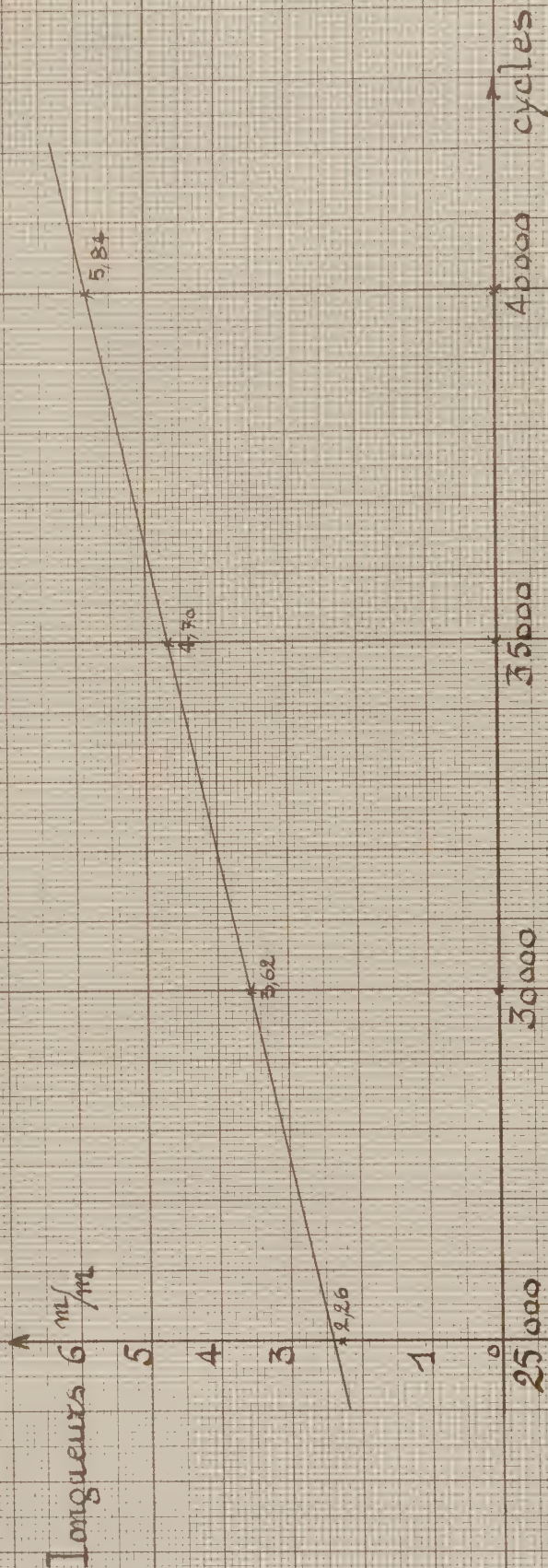
Ce procédé a été appliqué aux résultats obtenus sur 50 éprouvettes en AU 4 G 1 soumises à des efforts de traction ondulée sur machine SHENCK 10 t. La longueur de la fissure était relevée sur une radiophotographie prise à intervalles de temps réguliers. Les résultats et les détails du test figurent Annexe I. Ils ont pleinement confirmé le caractère Poissonnien du processus d'avancement de la fissure.

Dans ces conditions on doit obtenir pour $\bar{\ell}$ moyen en fonction du nombre de cycle : une droite.

Les valeurs relevées sur les courbes figurant en Annexe I permettent de tracer la courbe ci-contre (fig. 3 bis).

N	I	I _{moyen}
25000	15-23-18-23-07-5-	2,26
30000	108-22-28-37-2-18-7-12-12- 19-23-23-49-03-07-16-34-37- 15-	3,62
35000	25-34-18-22-64-79-98-36- 68-32-34-4-56-88-17-28- 48-75-122-	4,70
40000	26-31-89-18-42-14-3-32- 5-9	5,84

~ 168 360 ~



CHAPITRE V

LA LOI DE REPARTITION DES DUREES DE VIE

-:-:-:-

On a vu au chapitre précédent que le nombre K de fissures élémentaires apparues au temps t dans le métal de l'éprouvette pouvait être considéré comme réparti suivant une loi de POISSON :

$$(48) \quad P_K(t) = e^{-\alpha^{-1}t} \frac{(\alpha^{-1}t)^K}{K!}$$

Ce résultat vérifié expérimentalement permet d'obtenir par un simple raisonnement mathématique l'expression de la durée de vie en fatigue. Le problème consiste en effet à obtenir pour un nombre K de fissures élémentaires données, la distribution du temps t . La durée de vie correspondra alors au nombre de fissures élémentaires nécessaires pour obtenir la rupture. Si l'on admet que le nombre de fissures élémentaires doit avoir une valeur donnée pour que la crique résultante entraîne la rupture, comme on ignore le nombre de celles qui existent déjà dans la matière, on comprend que le temps au bout duquel la rupture interviendra, soit une variable aléatoire.

La probabilité qu'il ne se produise aucune fissure élémentaire pendant un certain intervalle de temps $(0 - t)$ est donnée par la formule :

$$P_0(t) = e^{-\alpha^{-1}t}$$

Soit alors t_i , t_{i+1} deux instants où se produisent deux fissures élémentaires successives P_i , P_{i+1} . Si $t_{i+1} - t_i$ est plus petit que t , la probabilité qu'il se produise au moins une fissure élémentaire dans t étant $1 - e^{-\alpha^{-1}t}$, on peut écrire :

$$(49) \quad \text{Prob} \left\{ t_{i+1} - t_i < t \right\} = 1 - e^{-\alpha^{-1}t} = G(t)$$

$G(t)$ est par définition la loi de répartition de l'intervalle de temps $t_{i+1} - t_i = t$.

La densité de probabilité s'écrit alors :

$$g(t) dt = \alpha^{-1} e^{-\alpha^{-1}t} dt \quad ; \quad t > 0$$

C'est une loi du type γ_1 . Sa valeur moyenne est

$$E(t) = \int_0^{\infty} \alpha^{-1} t' e^{-\alpha^{-1}t'} dt' = \alpha$$

α est donc bien la valeur moyenne d'une période élémentaire, séparant l'apparition de deux fissures élémentaires successives

Posons $\alpha^{-1}t = u$, la loi γ_1 sous forme réduite devient :

$$g(u) du = e^{-u} du.$$

Cherchons quel est l'intervalle de temps séparant K événements successifs, apparition des fissures élémentaires ... T_i, T_{i+1}, T_{i+2}

..... Considérons trois d'entre elles correspondant aux intervalles de temps $(t_{i+1} - t_i)$ et $(t_{i+2} - t_{i+1})$

Les variables

$$x = \alpha^{-1}(t_{i+1} - t_i)$$

et

$$y = \alpha^{-1}(t_{i+2} - t_{i+1})$$

sont, par hypothèse, indépendantes et suivent une loi γ_1

La loi élémentaire de la somme $u = (x+y) = \alpha^{-1}(t_{i+2} - t_i)$ est donnée par la convolution :

$$g_2(u) du = \int_{x=0}^u e^{-x} dx \cdot e^{-(u-x)} du = u e^{-u} du$$

On obtient ainsi une loi γ_2 réduite.

De proche en proche, par le même raisonnement, il est facile de trouver la densité de probabilité de l'intervalle de temps Provoquant l'apparition de K fissures élémentaires successives.

Si on pose $u = \alpha^{-1}(t_{i+K} - t_i)$ la loi de u a pour expression

$$g_K(u) du = e^{-u} \frac{u^{K-1}}{(K-1)!} du$$

.../

En introduisant la fonction Gamma : $\Gamma(K) = (K-1)!$ et rétablissant les paramètres initiaux, on obtient l'expression donnant la densité de probabilité du temps t :

$$(50) \quad g(t) dt = \frac{1}{\Gamma(K)} e^{-\frac{t}{\alpha}} \frac{t^{K-1}}{\alpha^K} dt$$

La durée de vie en fatigue d'une éprouvette soumise à des efforts répétés de façon périodique, doit donc être convenablement représentée par une fonction de Pearson type III dans laquelle les paramètres statistiques α et K ont une signification physique : l'un K est le nombre de fissures élémentaires dont la somme constitue la crique amenant la rupture, l'autre α représente la période moyenne d'apparition de chacune des fissures élémentaires successives.

Les paramètres α et K ont statistiquement les valeurs suivantes (voir chap. II) .

Le temps moyen est égal à

$$\left. \begin{aligned} \bar{t} &= \alpha K \\ \sigma^2 &= \alpha^2 K \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

et

$$\text{On a inversement : } K = \left(\frac{\bar{t}}{\sigma} \right)^2, \quad \alpha = \frac{\sigma^2}{\bar{t}} \quad (52)$$

On pourrait utiliser les formules (52) pour obtenir la valeur des paramètres K et α à partir d'un échantillon donné. Il est préférable au moins pour obtenir la valeur de K d'utiliser la méthode du maximum de vraisemblance qui ne fait intervenir que le nombre de cycles de la façon suivante :

L'expression (50) s'écrit :

$$g(t) dt = \frac{1}{\Gamma(K)} e^{-\frac{t}{\alpha}} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{K-1} d\left(\frac{t}{\alpha} \right) \quad (53)$$

Introduisons le nombre N de cycles jusqu'à rupture et soit $\bar{N}$ le nombre moyen .

On a (51) : $\alpha K = \bar{t} = \frac{\bar{N}}{f}$; $t = \frac{N}{f}$

$$\text{d'où } \frac{t}{\alpha} = \frac{N/f}{\bar{N}/f \times \frac{1}{K}} = K \frac{N}{\bar{N}} \quad (54)$$

en remplaçant dans (53) $\frac{t}{\alpha}$ par sa valeur (54) on a en posant
 $v = \frac{N}{\bar{N}}$ nouvelle variable aléatoire ,
 $m(v) dv = \frac{1}{\Gamma(K)} e^{-Kv} (Kv)^{K-1} d(Kv)$

soit :

$$(55) \quad m(v) = \frac{K^K}{\Gamma(K)} e^{-Kv} v^{K-1}$$

v est facile à construire puisque l'on connaît la moyenne de l'échantillon. On tire de (55) :

$$\text{Log } m(v) = K \text{Log } K - \text{Log } \Gamma(K) - Kv + (K-1) \text{Log } v$$

d'où l'estimateur du maximum de vraisemblance :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \text{Log } m(v_1) + \text{Log } m(v_2) + \dots + \text{Log } m(v_n) \\ &= n K \text{Log } K - n \text{Log } \Gamma(K) - K n \left(\frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n} \right) + n(K-1) \left[\frac{\text{Log } v_1 + \dots + \text{Log } v_n}{n} \right] \end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{1}{n} \mathcal{L} = K \text{Log } K - \text{Log } \Gamma(K) - K \bar{v} + (K-1) \overline{\text{Log } v}$$

$$\text{On écrit : } \frac{1}{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \text{Log } K + 1 - \frac{\Gamma'(K)}{\Gamma(K)} - \bar{v} + \overline{\text{Log } v} = 0$$

$$\text{mais on a posé : } v = \frac{N}{\bar{N}} \quad \text{donc} \quad \bar{v} = \frac{\bar{N}}{N} = 1$$

Il reste donc :

$$(56) \quad \chi(K) = \text{Log } K - \frac{\Gamma'(K)}{\Gamma(K)} = - \overline{\text{Log } v}$$

La fonction $\chi(K)$ est tabulée pour des valeurs de K allant de 0,01 à 100. On peut trouver cette table référence 14. Ayant calculé la moyenne des logarithmes népériens de v , on en déduit immédiatement K .

Connaissant la valeur de K on obtient celle de α par la formule :

$$(57) \quad \alpha = \frac{\bar{N}}{\sum K}$$

.../

On trouvera en annexe II l'application de ce procédé aux résultats obtenus au Laboratoire Central de SUD-AVIATION pour différents niveaux de la contrainte répétée.

Les valeurs de K , ainsi obtenues sur échantillon ne le sont qu'avec une certaine approximation. On peut évaluer le degré de confiance à accorder à cette valeur.

Supposons connue la valeur de α et posons $u = \frac{t}{\alpha}$ l'expression (53) devient :

$$h(u) du = \frac{1}{\Gamma(K)} e^{-u} u^{K-1} du$$

$$\text{on a : } E(u) = \frac{1}{\Gamma(K)} \int_0^{\infty} u^K e^{-u} du = \frac{\Gamma(K+1)}{\Gamma(K)} = K$$

$$\text{et : } \mu_2 = \frac{1}{\Gamma(K)} \int_0^{\infty} u^{K+1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(K+2)}{\Gamma(K)} = K(K+1)$$

$$\text{d'où } \sigma = \sqrt{K(K+1) - K^2} = \sqrt{K}$$

K est donc la moyenne de la variable aléatoire u . On ne peut évidemment se servir de ce résultat pour estimer K puisque en réalité α est inconnu et on ne pourrait obtenir la moyenne de u . Mais le fait que K soit une moyenne implique que pour un échantillon de n valeurs donnant K_n , $K_n \rightarrow K$ en probabilité quand n croît. Plus exactement la variable aléatoire

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (K_n - K)$$

a d'après le théorème de la valeur centrale limite, une loi de probabilité qui tend vers la loi de Laplace-Gauss réduite.

Autrement dit, plus n sera grand, plus la formule approchée suivante sera précise :

$$\text{Prob} \left\{ |K_n - K| > h \right\} = \frac{2}{\sqrt{n}} \int_{h \frac{\sqrt{n}}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (58)$$

Cette formule permet d'obtenir deux résultats intéressants. Donnons nous par exemple la valeur de h , ce qui revient à dire que K_n donne la valeur de K à $\pm h$ près, avec une certaine probabilité. Soit 0,05 la valeur de la probabilité, la table de la loi de LAPLACE-GAUSS réduite donne alors :

$$\frac{h \sqrt{n}}{\sigma} = 1,96$$

soit sensiblement $n \approx \frac{4 \sigma^2}{h^2}$

Mais nous avons vu que $\sigma = \sqrt{K}$, on a par conséquent :

$$n \approx \frac{4K}{h^2} \quad (59)$$

Si nous prenons h de l'ordre de 2 unités, nous voyons que le nombre d'éprouvettes à essayer devra être voisin de la valeur de K pour que l'on ait une probabilité de 95%, que K soit connu à ± 2 unités près. Lorsque pour un échantillon donné on obtiendra une valeur de K supérieure au nombre d'éprouvettes, il y aura lieu pour affirmer cette valeur d'augmenter les dimensions de l'échantillon jusqu'à inverser le rapport.

La formule (58) permet également de calculer h pour un n donné. Supposons que pour un K calculé nous prenions un intervalle de confiance de 0,998 alors K sera connu à une valeur h près donnée par :

$$h = 3,09 \sqrt{\frac{K}{n}} \quad (60)$$

Lorsque l'on a obtenu les valeurs de K et de α par cette méthode, il est facile de vérifier que les points expérimentaux sont bien représentés par la loi de Pearson type III. Il suffit pour cela d'effectuer un test du χ^2 . Comme on devait s'y attendre, étant donné l'excellent accord entre les résultats observés et la loi de Poisson pour la propagation de la crique, la répartition des durées de vie est bien représentée par une loi GAMMA. Toutefois, comme le test de la loi de Poisson n'avait pu être vérifié que pour un seul niveau de contrainte et sur un seul type d'éprouvette, on a pris la précaution d'effectuer un test du χ^2 sur chaque résultat obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance. En aucun cas l'accord n'a été démenti.

Il semble donc ainsi bien justifié de choisir parmi les lois présentées chapitre II, la loi GAMMA comme étant la mieux apte à représenter la distribution des durées de vie en fatigue d'une éprouvette soumise en laboratoire à une charge répétée périodique.

Nous verrons par la suite comment on peut à partir de ces résultats bâtir un modèle moins restrictif où la contrainte sera quelconque, aléatoire, et l'éprouvette sera une partie de structure réelle.

Avant cela il est nécessaire d'établir une relation entre la valeur des paramètres α et K et la contrainte.

CHAPITRE VI

=====

RELATIONS ENTRE LES PARAMETRES STATISTIQUES

 K et α ET LA CONTRAINTE

-:-:-:-:-

La seule relation étudiée jusqu'à ce jour entre la contrainte et une caractéristique de la durée de vie, est le diagramme d'endurance, ou de WÖHLER.

On présentait initialement ce diagramme de la façon suivante : "si l'on porte sur un diagramme, en ordonnées, l'amplitude des contraintes, et en abscisses les nombres de cycles, les résultats des essais de fatigue se situent sur une courbe qui présente une allure asymptotique et qui sépare le plan du diagramme en deux régions : une région supérieure correspondant à des conditions pour lesquelles les éprouvettes n'auraient pu résister, et une région inférieure pour laquelle les éprouvettes ne sont pas rompues. La limite d'endurance correspond à l'asymptote horizontale de la courbe" (Référence 1 - page 109).

Il est rapidement apparu qu'il était impossible de parler des résultats des essais de fatigue sans autre précision, étant donné la grande dispersion inhérente à ce phénomène comme nous l'avons montré au chapitre précédent. Les diagrammes d'endurance actuel ou diagramme S.N.P. dans leur désignation anglo-saxonne comportent une troisième dimension où apparaît la probabilité. La courbe représentant la durée de vie en fonction de la contrainte est donc définie pour une probabilité donnée.

Si ce résultat suffit dans bien des cas pratiques, nous avons vu par contre que pour aller plus loin dans l'exploitation des données - par ex. prévision des cycles d'échange, ou de réparation, prévision des quantités à stocker, etc ... - il était nécessaire de posséder une représentation analytique de la courbe de WÖHLER permettant de déterminer la fonction de répartition adéquate à représenter les durées de vie pour une contrainte donnée.

.... /

En fait, s'il était possible d'avoir directement l'expression de la loi de répartition des durées de vie en fatigue faisant apparaître le paramètre : contrainte, il est certain que le diagramme d'endurance perdrait de son intérêt tout au moins dans les problèmes de recherche opérationnelle.

Un essai de représentation du diagramme SNP a été effectué par Monsieur WEIBULL (réf. 15). La formule à laquelle il aboutit prend évidemment sa source dans la loi de répartition qui porte son nom. Elle n'est donc pas satisfaisante du point de vue adopté dans le présent essai. Mais ce qui est plus important, c'est que la formule qu'il obtient représentant le diagramme SNP comporte 4 paramètres de nature purement statistique sans relation directe avec la nature même de l'échantillon expérimenté. De sorte qu'il est peu probable qu'il soit possible dans ces conditions de dégager des constantes physiques caractéristiques de l'élément essayé : nature du métal, forme, dimensions, etc

Le procédé de M. WEIBULL consiste à adapter une courbe empirique à des résultats d'essais de fatigue. Il propose la formule :

$$S_a = b N^{-c} + S_E \quad (61)$$

où S_a est l'amplitude relative de la contrainte appliquée, c'est-à-dire rapportée à la contrainte de rupture statique,

S_E est la valeur médiane de l'endurance relative limite,

N est la durée de vie en kilocycles ,

b et c sont des paramètres numériques.

Si on appelle Δ la déviation de la médiane de la résistance relative à la fatigue, si Δ_o , Δ_u et α sont des paramètres, alors :

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{\Delta - \Delta_u}{\Delta_o}\right)^{1/\alpha}} \quad (62)$$

..../

La déviation Δ par rapport à la médiane, étant donné la définition ci-dessus est :

$$\Delta = s_a - \bar{b} N^c + s_E \quad (63)$$

Cette valeur reportée dans P donne une relation entre s_a , N et P c'est-à-dire le diagramme SNP.

Les paramètres figurant dans cette relation sont au nombre de six, soit : a , b , c , s_E , Δ_u , Δ_θ

s_E mis à part, aucun des cinq autres paramètres n'a une signification physique. Il est donc peu probable que l'on puisse leur trouver une liaison avec des constantes physiques permettant, une fois connues, leur détermination certaine. Il sera nécessaire pour chaque utilisation de s'en référer à une connaissance statistique avec les inconvénients que cela comporte.

La résolution d'un problème de prévision devient par ce procédé pratiquement impossible, si l'on ne peut, à l'aide de quelques résultats statistiques établis dans des cas limités, trouver par simple déduction les résultats relatifs aux autres cas.

C'est ce problème que l'on s'est proposé de résoudre. Il s'agit en conséquence de trouver une relation entre les paramètres statistiques K et α , et tous paramètres pouvant définir l'état physique de l'éprouvette soumise aux efforts de fatigue.

Un des premiers paramètres physiques est évidemment celui définissant l'état des contraintes. Les relations étant établies, il sera évidemment facile d'en déduire un modèle représentant le diagramme SNP.

L'étude théorique précédente a montré que dans tous les cas d'une charge variable périodiquement avec des caractéristiques constantes, la forme de la loi représentant les durées de vie est invariante et nous avons trouvé qu'elle pouvait être représentée par une loi de PEARSON type III.

.../

Si les caractéristiques de la charge varient, seules vont varier les valeurs des paramètres K et α . On peut donc établir une relation entre K , α et σ valeur de la contrainte.

1°/ Paramètre K .

On a vu que K représentait le nombre de fissures élémentaires devant se produire avant rupture.

Si il était possible de définir exactement ce qu'il faut entendre par fissure élémentaire, il serait probablement possible d'établir a priori une relation certaine qu'il suffirait de vérifier expérimentalement. Malheureusement, la fissure élémentaire considérée, représente une valeur moyenne qui dépend d'un grand nombre de facteurs. Ces facteurs pourront être approchés empiriquement mais la complexité du problème ne permet pas, pour le moment, une recherche théorique complète. Toutefois, un certain nombre de remarques permettent d'aboutir à une formule que justifient les résultats statistiques utilisés.

On peut remarquer en effet que K doit être nul en dehors d'un segment limité par deux valeurs de la contrainte.

Plus la contrainte augmente, plus le nombre de fissures élémentaires nécessaire pour atteindre la rupture doit être faible. A la limite, lorsque la contrainte atteint la valeur de la contrainte de rupture statique, ce nombre doit être nul, et il ne peut évidemment aller au delà puisque la contrainte elle-même ne peut dépasser cette valeur.

En outre, il existe pour tout métal, une limite inférieure de la contrainte en dessous de laquelle il ne se produit pas de rupture. Bien entendu, dans le cas présent, il s'agira d'une limite absolue, et non de la limite pratique d'endurance dont nous verrons ultérieurement la définition. Cette limite peut évidemment être nulle, et on peut concevoir qu'elle soit négative, ce qui voudrait dire que l'éprouvette devrait être comprimée pour que les fissures élémentaires naturellement existantes, disparaissent.

Entre ces deux limites quel sera le comportement de K ? Rien a priori ne peut laisser supposer une dissymétrie quelconque entre ces deux valeurs extrêmes. On peut donc espérer trouver les points répartis au voisinage d'une parabole ayant pour expression

$$K = M (\gamma - \gamma_0)(1 - \gamma) \quad (64)$$

où γ est un paramètre sans dimension représentant la contrainte et variant entre γ_0 et 1.

et M est un coefficient de proportionnalité dont on verra plus loin quelle peut être sa signification.

Seule une vérification expérimentale sur de nombreux cas peut établir la validité d'une telle formule. Malheureusement, comme il a été dit dans notre introduction, les résultats statistiques publiés offrant :

- 1) des données en nombre suffisant (plus grand que 30) pour une même charge ,
 - et 2) des données pour un nombre de charges plus grand que 2 ,
- sont extrêmement rares.

On a pu utiliser seulement quatre statistiques convenables. Les références et les résultats obtenus figurent sur le Tableau I ci-après.

La définition de γ adoptée est un peu différente de celle qu'il est d'usage d'utiliser. Si on désigne par σ_m la contrainte moyenne, σ_a l'amplitude de la composante sinusoïdale, l'amplitude maximum atteinte est égale à $\sigma_m + \sigma_a$. On prend pour valeur de γ dans la plupart des cas la quantité donnée par :

$$\gamma = \frac{\sigma_m + \sigma_a}{\sigma_R} \quad (65)$$

où σ_R représente la contrainte de rupture statique.

.... /

Référence	Type de l'éprouvette, σ_R , et nature de la charge	Nbre éprouv.	Valeurs numériques			γ_0	M_1	K calculé statistiquement	calculé par la formule $K = M(\gamma - \gamma_0)(1 - \gamma)$
			σ_a	σ_m	γ				
SUD-AVIATION Laboratoire Central 1961	AU 4 G 1	70	573,75	701,25	0,161	0,067	229	15,32 < 16,83 < 18,34	17,5
	= 4.250 kg	50	956,25	1168,75	0,310	"	"	33,27 < 35,88 < 38,49	37,22
	entaillée 2mm	50	1338,75	1636,25	0,512	"	"	48,15 < 52 < 55,15	48,21
	épais. 15mm larg. 68 mm charge ondulée	56	1692,56	2068,68	0,775	"	"	33,41 < 35,88 < 38,35	35,36
FFA - R : 59 Static Strength and fatigue properties of threaded bolts W. WEIBULL 1955	écrous et boulons	100	250	1000	0,192	0,076	58,3	12 < 13,1 < 14,2	12,57
	0,15	99	400	1000	0,308	"	"	15,44 < 16,7 < 17,97	15,44
	0,5	99	600	1000	0,462	"	"	13,78 < 15,32 < 16,86	16,84
	0,04 0,04 57kg/mm2 8 mm 2:297,7 kg charge ondulée	99	800	1000	0,616	"	"	12,66 < 14,05 < 15,44	15,44
FFA - R 68 Static Strength and fatigue properties of unnotched circular W. WEIBULL 1956	alliage d'alumin. 75 S - T	74	18	18	0,368	0,355	77,23	0,36 < 0,65 < 0,94	0,63
	= 66,8 kg	44	20,5	20,5	0,442	"	"	2,60 < 3,46 < 4,32	3,74
	barreau = 60 mm	44	23,5	23,5	0,542	"	"	4,94 < 6,09 < 7,24	6,61
	charge répétée	74	26,5	26,5	0,657	"	"	7,87 < 8,94 < 10,01	8
NACA Technical note 3 293 Sept. 1955	ALCLAD 75 S T 6	65	16000	0	0,205	0,175	265,73	4,81 < 5,72 < 6,63	6,63
	77.800psi	140	30000	0	0,385	"	"	34,32 < 35,88 < 37,44	25,3
	épais. 0,064 inch	44	40000	0	0,514	"	"	71 < 75 < 79	31,2
	larg. 0,5 inch charge alternée	40	60000	0	0,771	"	"	20,66 < 23 < 25,34	25,34

Cette formule présente un inconvénient, celui de ne pas permettre de distinguer les valeurs de γ telles que :

$$\sigma_m^1 + \sigma_a^1 = \sigma_m^2 + \sigma_a^2 = \dots = C^{\text{te}} \quad (66)$$

On sait cependant que les résultats expérimentaux d'essais de fatigue sont différents suivant que l'on utilise l'un ou l'autre des couples σ_a, σ_m définis ci-dessus. Le paramètre γ ainsi défini semble donc inadéquat pour une étude des caractéristiques de fatigue à contrainte variable.

Nous avons adopté comme paramètre γ le paramètre sans dimensions :

$$\gamma = \frac{\sigma_a}{\sigma_R - \sigma_m} \quad (67)$$

Le paramètre ainsi défini est variable pour des couples de valeurs σ_a, σ_m de somme constante. Il a pour valeur limite : l'unité, comme le précédent, puisque si : $\sigma_m + \sigma_a = \sigma_R$ on a :

$$\gamma = \frac{\sigma_R - \sigma_m}{\sigma_R - \sigma_m} = 1.$$

C'est ce paramètre qui a été utilisé pour définir la contrainte figurant sur le tableau I.

Enfin, ce paramètre tend vers 0 avec σ_a ce qui veut dire que sa signification est entièrement liée au phénomène dynamique créant l'état de fatigue.

Les résultats figurant au tableau I montre un accord excellent entre les données expérimentales et les applications de la formule proposée avec certaines valeurs de M et γ_0 pour les trois premiers documents : SUD-AVIATION, WEIBULL 59, WEIBULL 68. Ils sont beaucoup moins bons avec la statistique fournie par le NACA TN 3293. Si l'on ajuste la parabole avec le premier et le quatrième résultat, le second est assez voisin mais le troisième diffère largement. Remarquons toutefois que la forme générale de la répartition des points est conservée il semble qu'il y ait simplement une certaine dilatation des ordonnées.

Si l'on étudie les conditions de cette expérimentation, trois remarques peuvent être faites qui laissent à penser que ces résultats ne doivent pas être retenus :

- 1/ la forme alternée (traction compression) de la contrainte,
- 2/ la dispersion de la contrainte au cours de l'essai
- 3/ l'insuffisance de la dimension du 3^e échantillon.

Sur les quatre essais présentés c'est le seul dont la contrainte travaille en compression. Il est bien certain a priori que la propagation des fissures de fatigue est très différente en compression de ce qu'elle est en traction. Il serait donc nécessaire de faire des essais en compression ondulée ou répétée, avant de mélanger deux processus différents en contrainte alternée si l'on veut obtenir des résultats comparables.

A notre connaissance, aucune étude de ce genre n'a été effectuée jusqu'à ce jour.

La contrainte maximum est d'après les relevés figurant au document NACA comprise entre les limites suivantes :

15 000	16 000	16 800	écart maxi	1 800
28 200	30 000	32 100	- -	3 900
40 400	40 000	43 200	- -	2 800
57 000	60 000	63 100	- -	6 100

On a donc une variation de la contrainte atteignant 10% et plus. Cette variation peut être suffisante pour expliquer l'anomalie du second échantillon dont la valeur observée n'est pas très éloignée de la valeur calculée.

Il en va autrement de la valeur du troisième échantillon dont l'écart ne peut s'expliquer par des variations de la contrainte. Par contre cet écart est certainement dû à l'insuffisance de la dimension de l'échantillon. Nous avons vu que pour un intervalle de confiance de 95% la dimension de l'échantillon devait être au moins égale à la valeur de K . Pour tous les échantillons examinés et répartis sur le tableau I, sauf celui-ci, la dimension de l'échantillon est toujours supérieure à la valeur de K . Lorsque l'on applique la méthode du maximum de vraisemblance à des échantillons de dimension croissante, la valeur de K diminue jusqu'à se stabiliser pratiquement lorsque cette dimension atteint une valeur suffisante.

Dans le cas examiné présentement, il est certain qu'en augmentant le nombre d'éprouvettes qui a été limité à 44, le point représentatif se rapprocherait de la courbe théorique et ne prendrait une valeur significative que lorsque la valeur de K deviendrait plus petite que la dimension de l'échantillon.

Pour l'ensemble de ces raisons, on peut affirmer que la courbe que l'on obtiendrait avec une expérimentation bien conduite quant à la constance de la contrainte et la dimension des échantillons, serait voisine de la parabole théorique. Toutefois le manque de connaissances sur l'influence de la compression ne permet pas de conclure à la validité de cette représentation dans ce cas.

Les trois premiers essais cependant offrent un accord remarquable, dans le cas d'une contrainte périodique de caractéristiques constantes, ondulée ou répétée, avec la représentation :

$$K = M(\gamma - \gamma_0)(1 - \gamma) \quad (64)$$

On a ainsi explicité l'influence de la contrainte sur le coefficient K .

Dans cette formule figure le coefficient M . Ses valeurs calculées ont été reportées sur le tableau I. Que peut-on dire a priori de ce coefficient ?

K , γ et γ_0 sont par leur nature ou par définition des variables ou paramètres sans dimension, il est donc nécessaire que M soit également sans dimension. K étant le nombre de fissures élémentaires nécessaire pour atteindre la rupture, il est à penser que ce nombre doit être proportionnel à la section de l'éprouvette. Soit S cette section, on devra vérifier que M peut être mis sous la forme :

$$M = I \cdot \frac{S}{s}$$

..../

En effet pour que M soit sans dimension, la section S devra être rapportée à une surface de référence qui, dans ce cas, se présente comme la surface moyenne des criques élémentaires fictives. Il doit être vérifié que S est une constante physique caractérisant la matière de l'éprouvette et son état cristallin.

Bien entendu, il doit intervenir un coefficient I caractérisant la forme et la qualité de l'éprouvette, coefficient d'entaille, état de surface, etc

C'est dans la variation de cet indice de forme qu'apparaîtront les qualités de l'éprouvette qui ne peuvent être mesurées par une unité dimensionnelle connue.

On voit ainsi se justifier le titre donné à cet essai. Il est bien évident qu'il n'existe pas dans la littérature publiée sur la fatigue assez de statistiques pour vérifier les hypothèses ci-dessus. Celles qui ont été utilisées pour déterminer la relation de K avec γ se rapportent à des éprouvettes très différentes par leurs caractéristiques de matière et de forme ; les valeurs trouvées pour M sont en conséquence très différentes et n'ont aucun point commun de comparaison. Ces hypothèses plausibles sur la structure de ce coefficient permettent, par contre, d'élaborer un programme d'essais rationnel où peut entrer l'étude de tous les phénomènes sur lesquels des aperçus partiels ont déjà été obtenus mais qui dans l'état actuel des théories sur la fatigue restent sans liens entre eux. Il s'agit en somme de faire la synthèse de toutes les "influences" qui sont la base de toutes les études de fatigue.

Dans la formule (64) figure également le paramètre γ_0 . Son interprétation physique est immédiate : c'est la contrainte au dessous de laquelle ne se produit aucune rupture de fatigue.

Le diagramme de Goodman-Smith non modifié permet de se rendre compte de l'influence de ce paramètre.

..../

La figure IV représente ce diagramme d'après la référence 1. Dans le cas présent à une valeur de γ_0 correspond un couple σ_m σ_a donné par :

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_a}{\sigma_R - \sigma_m}$$

la valeur de l'abscisse, puisque la droite de référence est tracée à 45° est égale à l'ordonnée $\sigma_m - \sigma_a$ soit :

$$x = \sigma_m - \sigma_a = \sigma_m - (\sigma_R - \sigma_m) \gamma_0 = \sigma_m (1 + \gamma_0) - \gamma_0 \sigma_R$$

au point O, $x = 0$ et $\sigma_m = \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_0} \sigma_R$

La valeur de l'ordonnée c est $\frac{2\gamma_0}{1 + \gamma_0} \sigma_R$ c'est la limite d'endurance en traction répétée.

En traction alternée, la limite est évidemment égale à $\gamma_0 \sigma_R$.

Si γ_0 est un paramètre physique dépendant du métal utilisé, sa valeur doit être la même dans les deux cas, c'est-à-dire que si

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \frac{2\gamma_0}{1 + \gamma_0} \sigma_R &= \tau \sigma_R \\ \gamma_0 \sigma_R &= s \sigma_R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{la première relation donne :} \quad \gamma_0 &= \frac{\tau}{2 - \tau} \\ \text{la seconde :} \quad \gamma_0 &= s \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad s = \frac{\tau}{2 - \tau} \quad (68)$$

Les valeurs admises d'après les résultats de Wöhler pour la limite d'endurance a , qui correspond à la moitié de l'écart limite, sont $\frac{R}{3}$ aux efforts alternés et $\frac{R}{2}$ aux efforts répétés. Ces valeurs correspondent à :

$$\tau = \frac{1}{2}; \quad s = \frac{1}{3}$$

On voit immédiatement que la relation (68) est bien vérifiée pour ces valeurs. Dans ce cas $\gamma_0 = \frac{1}{3} = 0,332$. C'est une valeur très voisine de celle qui a été trouvée avec les statistiques du rapport 68 de Weibull.

..../

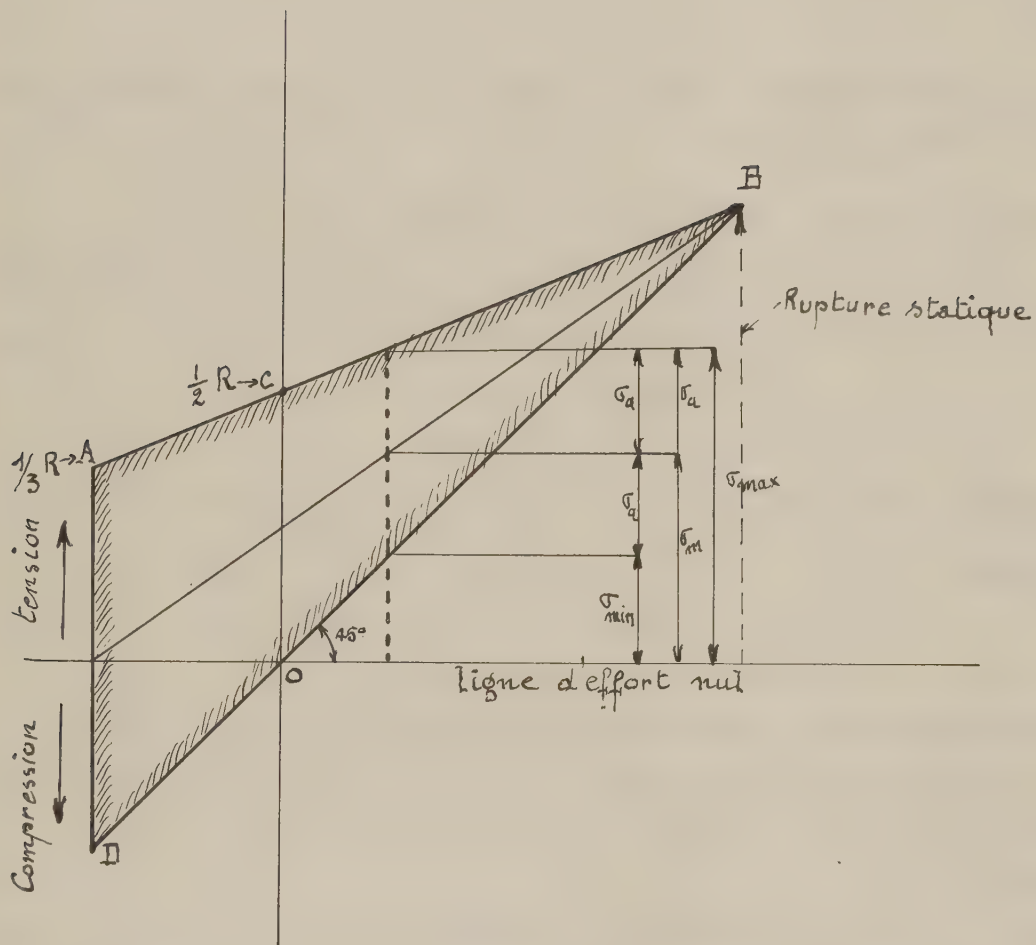


Diagramme de GOODMAN - SMITH
(d'après CAZAUD. R. ref. 1)

fig 4

Toutefois ce cas est unique et pour les deux autres statistiques γ_0 est soit très faible, soit même négatif. Rien ne s'oppose cependant à la construction du diagramme. Les valeurs de z et λ sont seulement différentes. Dans le cas SUD-AVIATION, on trouve :

$$z = 0,125$$

$$\lambda = 0,067$$

et dans le cas Weibull 59 :

$$z = -0,164$$

$$\lambda = -0,076.$$

On a été amené à modifier le diagramme de Goodman en admettant une limite d'endurance aux efforts alternés égale à $\frac{R}{2}$. En fait, on voit d'après les résultats ci-dessus que la valeur de λ qui correspond aux efforts alternés est extrêmement variable et dépend de la nature du métal et probablement de la forme de l'éprouvette. Il y a là encore un champ d'investigation ouvert qui permettra d'établir la relation entre le type de l'effort appliqué et la limite d'endurance pour des caractéristiques différentes de l'éprouvette. Dans l'état actuel des statistiques offertes, il est impossible d'établir cette relation, et de voir comment se modifie réellement le diagramme de Goodmann-Smith.

2°/ Paramètre α .

Nous avons vu que α représente la période moyenne d'apparition des fissures élémentaires. Sa valeur se déduit de la formule :

$$\bar{t} = \alpha K = \frac{\bar{N}}{f} \quad \text{où } f \text{ est la fréquence d'application de la charge, soit : } \alpha f = \frac{\bar{N}}{K} \quad (69)$$

Cette formule permet de calculer les différentes valeurs de αf d'après les résultats expérimentaux connus. Bien entendu, il faudra tenir compte de ce que $\bar{N}$ est une moyenne connue sur échantillon, et par suite déterminée à un intervalle près correspondant à une probabilité de 999,8%..

$$\text{On prendra } \begin{aligned} \bar{N}_- &= \bar{N} - 3,09 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \bar{N}_+ &= \bar{N} + 3,09 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (70)$$

..../

Les limites extrêmes de $\alpha \frac{P}{T}$ seront obtenues en prenant le plus grand $\bar{N}$ pour le plus petit K possible et inversement. Elles figurent Annexe III, avec les valeurs utilisées pour le calcul de α .

Le raisonnement suivant permet de déterminer a priori une forme possible de la fonction $y = \alpha \frac{P}{T} = P(\gamma)$.

Pour que $\bar{N}(\gamma)$ soit en accord avec les courbes de Wöhler habituellement représentées, il faut que $\bar{N} = 0$ lorsque $\gamma = 1$, $\bar{N}$ étant un nombre entier, il ne paraît pas opportun de lui donner une valeur comprise entre 0 et 1 comme certains auteurs l'ont fait pour tenir compte de ce que l'application de la charge de rupture statique n'est pas instantanée. En outre, lorsque γ tend vers 0 il faut que le nombre de périodes devienne infini, il y a impossibilité de rupture, puisqu'il n'y a pas de charge appliquée.

Pour ces raisons, on posera

$$\bar{N} = A(1-\gamma) e^{\frac{B}{\gamma}} \quad (71)$$

Puisque $y = \alpha \frac{P}{T} = \frac{\bar{N}}{K}$; il vient :

$$y = \frac{A(1-\gamma) e^{\frac{B}{\gamma}}}{M(1-\gamma)(\gamma-\gamma_0)} = C \frac{e^{\frac{B}{\gamma}}}{\gamma-\gamma_0} \quad (72)$$

Si C est une constante, A est une constante proportionnelle à M pour une même éprouvette. Toutefois d'une éprouvette à l'autre le coefficient C varie. Il est difficile a priori de dire ce que représente ce coefficient. La formule (72) ci-dessus est en accord avec l'idée que l'on peut avoir de la quantité y qui est sans dimension;

α est une période et $\frac{P}{T}$ l'inverse d'une période. α est la période moyenne d'apparition d'une crique élémentaire et $T = \frac{1}{\frac{P}{T}}$ la période de variation de la charge cyclique appliquée. Lorsque l'on a affaire à une charge statique T est nul. α est également nul, mais leur rapport peut être fini, en particulier si $\gamma = 1$, y est une quantité finie. y n'est nul que pour une charge infinie, ce qui implique que la durée d'application soit nulle. Une autre condition limite est que y soit infini pour $\gamma = \gamma_0$. Bien entendu, il faut ajouter à (72) la condition de validité

$$\text{et} \quad \begin{array}{l} \gamma \geq \gamma_0 \\ y = 0 \end{array} \quad \gamma < \gamma_0 \quad \dots/ \quad (73)$$

Dans ces conditions le calcul des valeurs de y expérimentalement déterminées et obtenues par la formule (72) montre un accord excellent, dans les limites considérées, comme on peut s'en rendre compte par la figure V. Il serait souhaitable cependant d'augmenter le nombre de points permettant de vérifier cet accord.

De plus, il reste à déterminer la variabilité en fonction des caractéristiques physiques de l'éprouvette, des paramètres A et B tous deux sans dimension .

Pour une même éprouvette, A est proportionnel à M , précédemment défini. Si la différence entre A et M provient d'une caractéristique spécifique de α le rapport $\frac{A}{M} \cdot C$ devrait rester constant lorsque varie une caractéristique spécifique de M toutes choses égales d'ailleurs. Ce travail est à ajouter au programme déjà entrevu à propos de M . Le paramètre B caractérise la variation du taux d'accroissement de la quantité y .

On peut écrire en effet

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} = - \left(\frac{1}{\gamma - \gamma_0} + \frac{B}{\gamma^2} \right) \quad (74)$$

Le terme $\frac{B}{\gamma^2}$ apparaît ainsi comme un terme correctif de ce taux par ailleurs uniquement fonction de la quantité γ_0 . La variabilité est à étudier, mais il ne semble pas possible de faire a priori des hypothèses permettant de lui attribuer une structure définie.

A noter toutefois que le même essai fournit les éléments d'étude des paramètres A, B et par conséquent C, et M en fonction de chacun des éléments caractéristiques de la configuration de l'éprouvette. L'introduction de quatre paramètres : A B M γ_0 n'augmente donc pas la complexité du programme d'essais à retenir étant donné le caractère commun des éléments de structure de chacun d'eux.

En possession des deux relations :

$$K = M (1 - \gamma)(\gamma - \gamma_0)$$

$$\alpha f = C \frac{e^{B/\gamma}}{\gamma - \gamma_0}$$

....

il est aisé de trouver une expression permettant de construire les courbes de Wöhler relatives à une éprouvette déterminée.

Nous avons vu que la fonction de répartition des durées de vie s'obtient à partir des tables de Pearson de la fonction $I(u, p)$ dans laquelle :

$$\begin{aligned} p &= K-1 \\ \sqrt{p+1} u &= \frac{t}{\alpha} \\ \text{comme } t &= \frac{N}{f} \quad \text{on a :} \\ N &= f t = f \alpha \sqrt{p+1} u = f \alpha \sqrt{K} u \end{aligned}$$

il suffit de remplacer dans cette formule $f \alpha$ et K par leur expression en fonction de γ .

En posant $\Pi = C M^{1/2}$ on trouve la formule

$$N = \Pi \cdot \left(\frac{1-\gamma}{\gamma-\gamma_0} \right)^{1/2} e^{B/\gamma} u \quad (75)$$

avec

$$\begin{cases} \gamma > \gamma_0 & \text{pour } \gamma_0 > 0 \\ \gamma > 0 & \text{pour } \gamma_0 < 0 \end{cases}$$

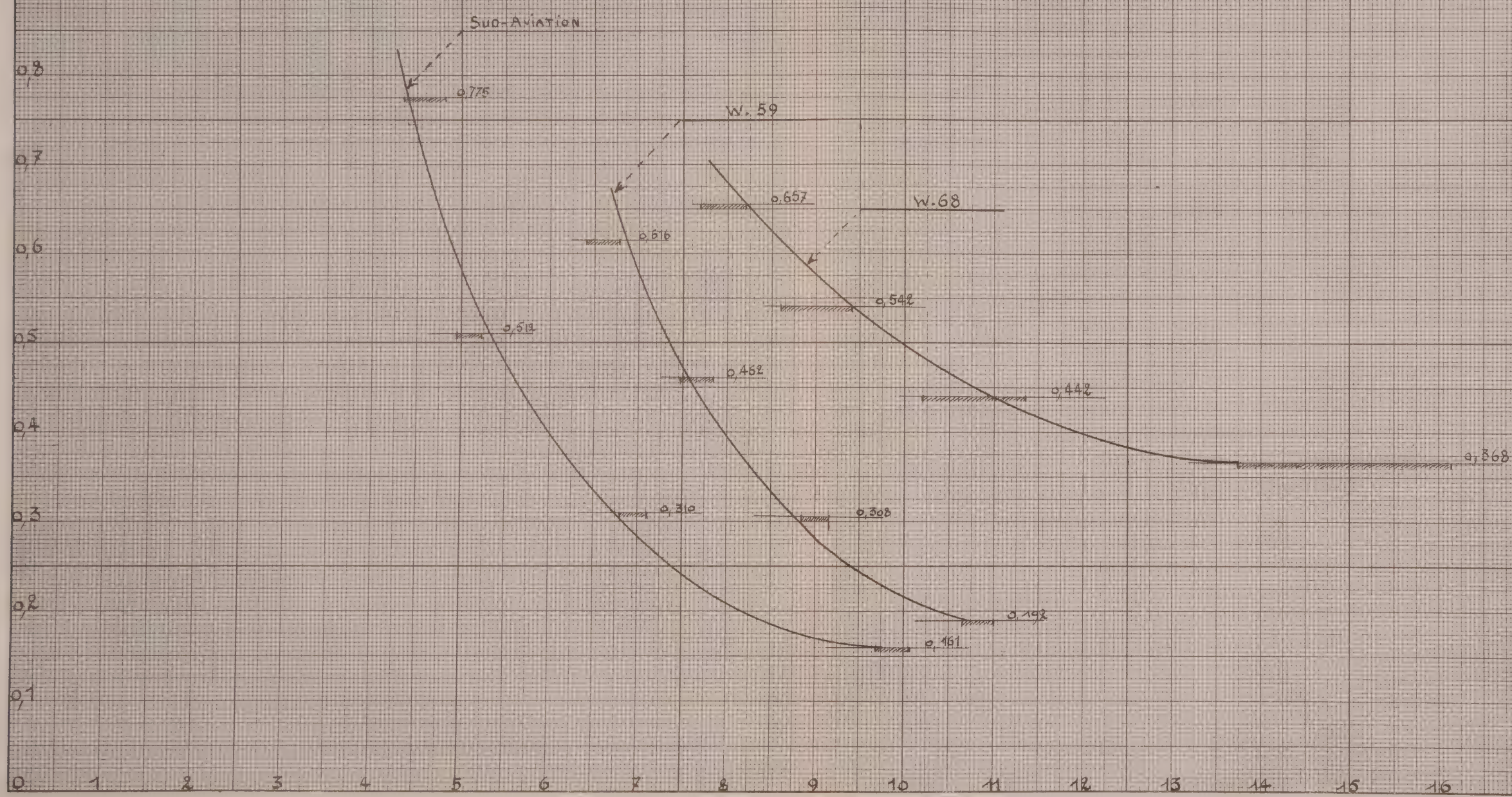
pour $\gamma = 1$ cette quantité est nulle et pour $\gamma = \gamma_0$ elle est infinie. Bien entendu si γ_0 est négatif la limite est $\gamma = 0$ pour laquelle N est également infinie, u est déterminé pour une probabilité choisie.

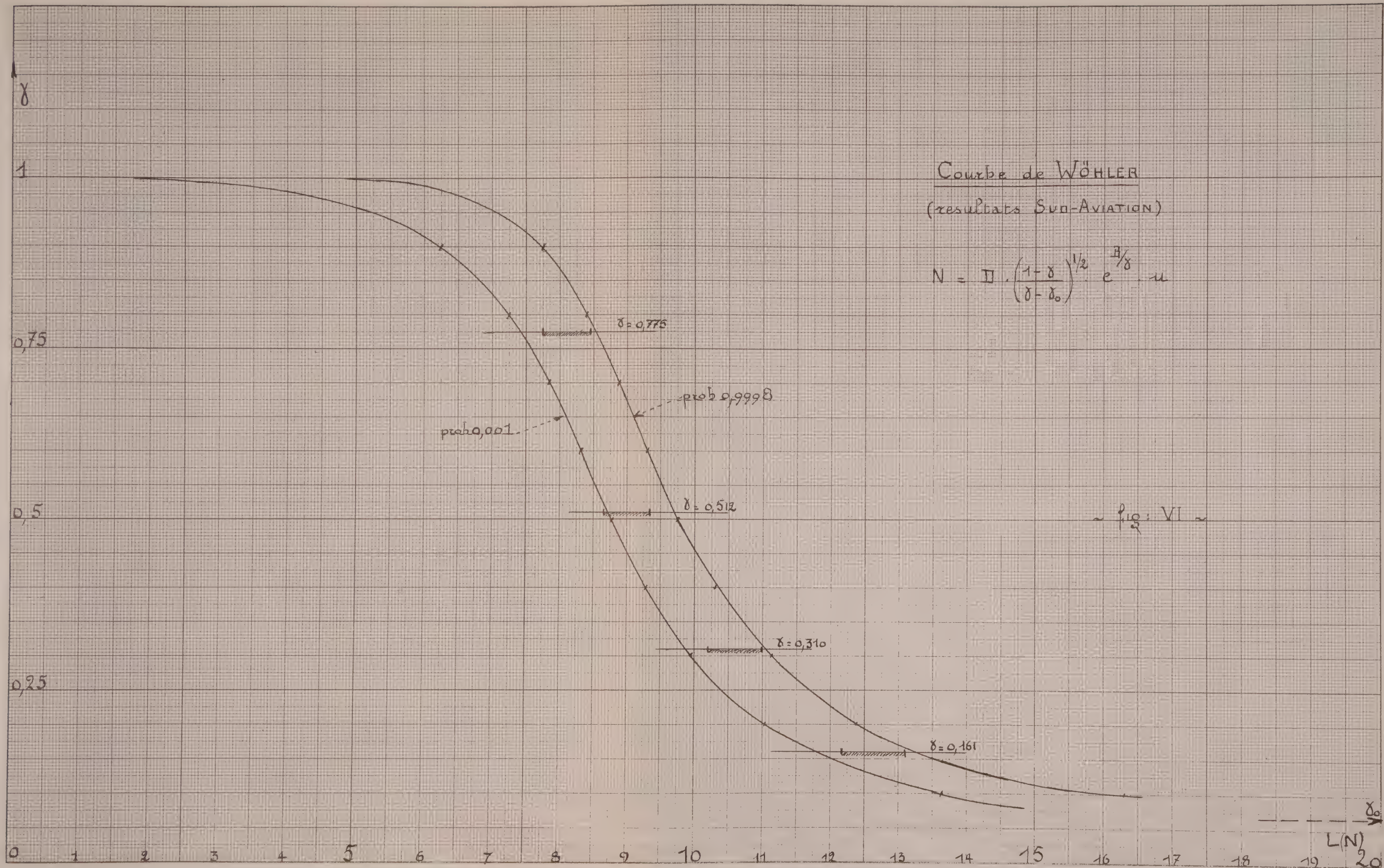
En effet pour un γ donné K est déterminé et il suffit d'entrer dans la table de Pearson avec K et la probabilité choisie pour obtenir la valeur de u correspondante. On a tracé ainsi le réseau de courbes correspondant à l'essai SUD-AVIATION fig. VI.

On voit que les résultats expérimentaux se placent correctement par rapport au réseau de ces courbes qui ont été établies pour les probabilités 0,1 ; 0,5 ; 0,99.

Courbes $L(y = \alpha f)$

~ Fig. 5 ~





CHAPITRE VII

EFFETS DE LA VARIATION DES CONDITIONS D'APPLICATION DE LA CHARGE

Les résultats obtenus précédemment supposaient que la variation de la charge appliquée était périodique et que les caractéristiques : fréquence, contrainte moyenne, amplitude restaient constantes jusqu'à la rupture de l'éprouvette. Dans la réalité la contrainte a toujours des caractéristiques variables ; soit que l'on fasse varier la valeur de σ_{mL} suivant un diagramme préétabli pour étudier en laboratoire la nature de l'endommagement, soit que, la valeur de σ_{mL} restant à peu près constante la valeur de σ_a soit aléatoire comme cela se produit dans les phénomènes de "jet noise" que peut subir une structure d'avion à réaction.

En ce qui concerne la fréquence, nous admettrons avec M. CAZAUD, que jusqu'à l'apparition d'un échauffement sensible dû à l'hysteresis mécanique, le phénomène de rupture n'est pas modifié par sa variation. Au delà, on a affaire à l'influence de la chaleur. Faute de données exploitables, ce domaine ne sera pas exploré dans le présent essai. Mais on conçoit tout l'intérêt qu'il présentera au moment où l'on atteindra les limites du "mur de la chaleur" au cours des vols supersoniques de demain. A noter que le modèle proposé peut servir, en introduisant un paramètre température, à une étude systématique de l'influence de la chaleur, à condition, bien entendu, d'inscrire cette étude dans un programme permettant la rupture d'un nombre suffisant d'éprouvettes.

Il est d'usage, à propos du mode d'application de la charge, de signaler les phénomènes "d'overstressing" et "d'understressing" se produisant lorsque la contrainte est alternée. Nous avons vu que les résultats trouvés pour un essai en contrainte alternée ne s'interprétaient pas aussi bien que les autres, et cela probablement à cause de l'effet réparateur dû à la compression. Nous en avons conclu que, étant donné l'absence de résultats suffisamment nombreux dans ce domaine, il convient de réserver les conclusions relatives aux contraintes alternées.

Il ne semble pas que les mêmes réserves aient été observées quant aux phénomènes d'overstressing et d'understressing. On peut relever dans le livre de M. CAZAUD précédemment cité, l'expérience suivante :

"Une éprouvette d'acier au carbone extra dur à 1,1% de carbone donnant à l'état recuit : $E = 60 \text{ kg/mm}^2$, $R = 74,5 \text{ kg/mm}^2$, $A\% = 5$, avait supporté sans rupture pendant 100 millions de cycles une charge de $24,5 \text{ kg/mm}^2$ correspondant à la limite d'endurance. Cette même éprouvette a été alors chargée à $25,9 \text{ kg/mm}^2$, et a supporté sans rupture 100 millions de cycles. Chargée ensuite à 27 kg/mm^2 , puis à $28,1 \text{ kg/mm}^2$, elle a de nouveau supporté chacune de ces charges pendant 100 millions de cycles. Chargée enfin à $28,2 \text{ kg/mm}^2$, la rupture a eu lieu au bout de 3.205.000 cycles.

Le relèvement de la limite d'endurance est ainsi de :

$$28,1 - 24,5 = 3,6 \text{ kg/mm}^2$$

Nous avons vu que la limite d'endurance devait être définie de façon absolue par le γ_0 ou bien pouvait être définie pour un nombre de cycles donné mais dans ce cas devait être accompagnée de la probabilité de rupture correspondante.

Pour une charge donnée $24,5 \text{ kg/mm}^2$ par exemple, K et α sont déterminés et si on se donne N , il en résulte une valeur de la probabilité qui définit une limite d'endurance pratique.

Bien entendu si γ varie, la probabilité de rupture admise varie et suivant une loi de répartition qui n'est plus la même. Il en résulte que la limite d'endurance correspondant à une même probabilité n'est plus la même.

La différence qui en résulte est évidemment une variable aléatoire, et il est impossible d'évaluer cette différence sur une seule éprouvette.

Le seul moyen de mettre en évidence de façon quantitative un phénomène d'overstressing ou d'understressing serait d'étudier la variation de γ_0 avec une charge variable, en même temps que la déformation de la parabole représentant $K(\gamma)$. Il y faut, encore une fois, plus d'une éprouvette.

.../

Quoiqu'il en soit des efforts alternés, il reste à étudier ce qui se passe lorsque l'on applique des efforts répétés ou ondulés dont le niveau varie par palier. Le problème peut être posé en ces termes : Peut-on définir un dommage unitaire, et ce dommage présente-t-il un caractère additif ?

La règle de MINER a été avancée pour résoudre ce problème.

Supposons que les contraintes $\gamma_1, \gamma_2 \dots$ soient appliquées successivement pendant des nombres de cycles $n_1, n_2 \dots$. Soit $N_1, N_2 \dots$ les nombres de cycles à rupture sous les contraintes $\gamma_1, \gamma_2 \dots$. On définit un endommagement unitaire $\frac{1}{N_i}$. L'endommagement total sera $y = \sum_i \frac{n_i}{N_i}$.

La règle de MINER précise que la rupture a lieu lorsque $y = 1$.

Bien entendu cette règle n'a jamais pu être vérifiée, et MINER lui-même a observé des résultats variant de 0,61 à 1,45.

En admettant que la définition de l'endommagement unitaire soit valable, il est évident que la quantité y est une variable aléatoire puisque les N_i sont eux-mêmes des variables aléatoires, et qu'elle ne pourra prendre la valeur 1 qu'avec une certaine probabilité. On peut d'ailleurs établir la fonction de distribution de y de la façon suivante.

On sait que le temps t à rupture est distribué suivant la loi de Pearson type III,

$$g(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\kappa)} e^{-\frac{t}{\alpha}} \frac{t^{\kappa-1}}{\alpha^{\kappa}} dt$$

d'autre part $t = \frac{N}{f}$ on en déduit la loi de distribution de N qui s'écrit en posant : $\beta = \alpha f$

$$h(N) dN = \frac{1}{\Gamma(\kappa)} e^{-\frac{N}{\beta}} \frac{N^{\kappa-1}}{\beta^{\kappa}} dN \quad (76)$$

Pour trouver la loi de répartition de $\sum_j \frac{n_j}{N_j}$ il est nécessaire de passer par l'intermédiaire des fonctions caractéristiques.

On sait que si on connaît la loi de répartition $T'(x)$ d'une variate x , on obtient la fonction caractéristique de la loi de répartition de $y(x)$ par la formule :

$$\bar{\Phi}_y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it y(x)} dT'(x) \quad (77)$$

ici $x = N_j$; $y(x) = \frac{n_j}{N_j}$. Soit $\bar{\Phi}_j(t)$ la fonction caractéristique correspondante :

$$\text{on a } \bar{\Phi}_j(t) = \frac{1}{\beta_j^{\kappa_j} \Gamma(\kappa_j)} \int_0^{\infty} e^{it \frac{n_j}{N_j} - \frac{N_j}{\beta_j}} N_j^{\kappa_j-1} dN_j \quad (78)$$

Sous cette forme il est difficile d'obtenir une expression analytique de $\bar{\Phi}_j(t)$ mais on peut utiliser un développement en série des moments de la fonction $T'(x)$ autour du point t_0 , on a en effet :

$$\bar{\Phi}(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \left\{ \frac{(t-t_0)^v}{v!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^v e^{it_0 x} dT'(x) \right\} + R_m \quad (79)$$

Si on pose :

$$\frac{n_j}{N_j} = x \quad \left| \quad N_j = \frac{n_j}{x} \right. \\ dN_j = -\frac{n_j}{x^2} dx$$

on a :

$$\bar{\Phi}_j(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \frac{n_j^{\kappa_j}}{\beta_j^{\kappa_j} \Gamma(\kappa_j)} e^{-\frac{n_j}{x\beta_j}} \frac{1}{x^{\kappa_j+1}} dx$$

On voit que :

$$dT'(x) = \frac{n_j^{\kappa_j}}{\beta_j^{\kappa_j} \Gamma(\kappa_j)} e^{-\frac{n_j}{x\beta_j}} \frac{1}{x^{\kappa_j+1}} dx$$

Il faut donc calculer avec cette expression les quantités :

$$\alpha_v = \int_0^{+\infty} x^v e^{it_0 x} dT'(x)$$

Suivant un procédé classique, on peut écrire :

$$\alpha_v = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it_0 x)^n}{n!} x^v dT'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it_0)^n}{n!} \int_0^{+\infty} x^{n+v} dT'(x) \quad \dots/$$

Soit :

$$\alpha_v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it_0)^n}{n!} \int_0^{\infty} \left(\frac{n_j}{\beta_j}\right)^K \cdot \frac{1}{\Gamma(K_j)} \cdot e^{-\frac{n_j}{\beta_j}x} x^{n+v-K_j-1} dx$$

posons :

$$\frac{n_j}{\beta_j} x = u \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{n_j}{\beta_j} \cdot \frac{1}{u} \\ dx = -\frac{n_j}{\beta_j} \cdot \frac{1}{u^2} du \end{array} \right.$$

il vient :

$$\alpha_v = \frac{1}{\Gamma(K)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it_0)^n}{n!} \left(\frac{n_j}{\beta_j}\right)^{n+v} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{K-1-(n+v)} du$$

L'intégrale est la fonction eulérienne et a pour valeur :

$$\Gamma[K-(n+v)]$$

On a donc pour α_v l'expression suivante :

$$\alpha_v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it_0)^n}{n!} \left(\frac{n_j}{\beta_j}\right)^{n+v} \frac{\Gamma[K-(n+v)]}{\Gamma(K)}$$

L'expression développée de $\bar{\Phi}_j(t)$ s'écrit donc en séparant les termes pour $n = v = 0$

$$\bar{\Phi}_j(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(it_0)^n}{n!} \left(\frac{n_j}{\beta_j}\right)^n \frac{\Gamma(K-n)}{\Gamma(K)} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{L(t-t_0)^v}{v!} \alpha_v \quad (80)$$

L'expression (80) peut être calculée pour différents points $t = t_0$ ce qui élimine le deuxième développement et permet un calcul approché suffisant.

Suivant les valeurs de γ_i intervenant dans le diagramme, on calculera les $\bar{\Phi}_1(t)$, $\bar{\Phi}_2(t)$ etc

La fonction caractéristique de y : $\Psi(t)$ sera égale à

$$\Psi(t) = \prod_i \bar{\Phi}_i(t)$$

pour chaque $t = t_0$.

..../

On obtient donc cette fonction par points.

L'inversion de $\Psi(t)$ donne alors la courbe de répartition de y

On a, par exemple :

$$F(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{ity} \Psi(t) - \bar{e}^{-ity} \Psi(t)}{it} dt \quad (81)$$

Le calcul a été effectué sur IBM 650 avec les données suivantes :

$$\begin{array}{llll} \gamma_1 & = 0,3 & K_1 & = 37 & \beta_1 & = 1169 & n_1 & = 75.000 \\ \gamma_2 & = 0,7 & K_2 & = 44 & \beta_2 & = 121 & n_2 & = 6.000 \end{array}$$

On peut avoir, par exemple : 6 cycles à 0,7 et 75 à 0,3 répétés 1000 fois de suite.

Les résultats obtenus sont exposés ANNEXE V.

Comment interpréter ces résultats ?

La règle de MINER pose que la rupture a lieu au bout d'un nombre de cycles $N = n_1 + n_2 + \dots$ tel que :

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots = 1 = \frac{n_1 + n_2 + \dots}{N}$$

Si la valeur de $\sum \frac{n_i}{N_i}$ n'est pas 1 mais y , la rupture aura lieu pour un nombre de cycles $N = \frac{n_1 + n_2 + \dots}{y}$

Pour un $\sum n_j$ donné, le calcul ci-dessus permet donc d'obtenir la loi de répartition du nombre de cycles N à rupture.

Il serait intéressant de contrôler expérimentalement ce résultat.

Un accord convenable justifierait l'hypothèse de l'indépendance de l'addition des endommagements unitaires. Les seuls résultats à notre disposition en nombre suffisant ayant été effectués avec une contrainte alternée il ne nous a pas paru intéressant de les utiliser dans une première vérification.

Cette hypothèse d'indépendance permet cependant d'utiliser les résultats précédents pour établir une théorie analogue dans le cas où la contrainte varie d'une façon continue et aléatoire.

...../

En effet, si au lieu de considérer un nombre de cycles discret, on considère les durées exprimées en temps, on peut définir en endommagement unitaire égal à $\frac{1}{T}$, où T est une fonction aléatoire du temps et du paramètre γ , lui-même fonction aléatoire du temps. Pour un intervalle de temps Δt l'endommagement sera $\frac{\Delta t}{T}$ et la fonction y précédemment envisagée peut s'écrire :

$$y = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta t_i}{T_i} \quad (82)$$

avec

$$\sum_{i=1}^n \Delta t_i = \tau$$

En fait, rien n'empêche de considérer les Δt_i égaux entre eux et de prendre leur valeur commune comme unité de temps. Plus cette unité sera petite par rapport à τ plus l'erreur sera petite par rapport à la valeur exacte de y qui pourrait s'écrire :

$$y = \int_0^{\tau} \frac{dt}{T} \quad (83)$$

Mais l'expression (83) se prête mal au calcul de la fonction de répartition de y et compte tenu de la remarque ci-dessus, nous écrirons :

$$y = \sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{T_i} \quad (i = 1, 2, \dots, \tau) \quad (84)$$

T_i étant exprimé dans la même unité que τ .

$\gamma(t)$ est une fonction aléatoire dont le caractère Laplacien stationnaire peut être admis, tout au moins pour des phénomènes tels que le "Jet noise" dû à la turbulence du flux des réacteurs sur les gouvernes d'un avion à réaction. La figure VII donne le dépouillement d'un enregistrement sur bande magnétique des efforts subis par un strain-gage appliqué sur la nervure 15 du plan fixe vertical de CARAVELLE.

On conçoit d'ailleurs a priori que $\gamma(t)$ ou plus exactement $\tau(t)$, ait ce caractère car le phénomène correspond à la définition qu'en donne M. FORTET :

.../

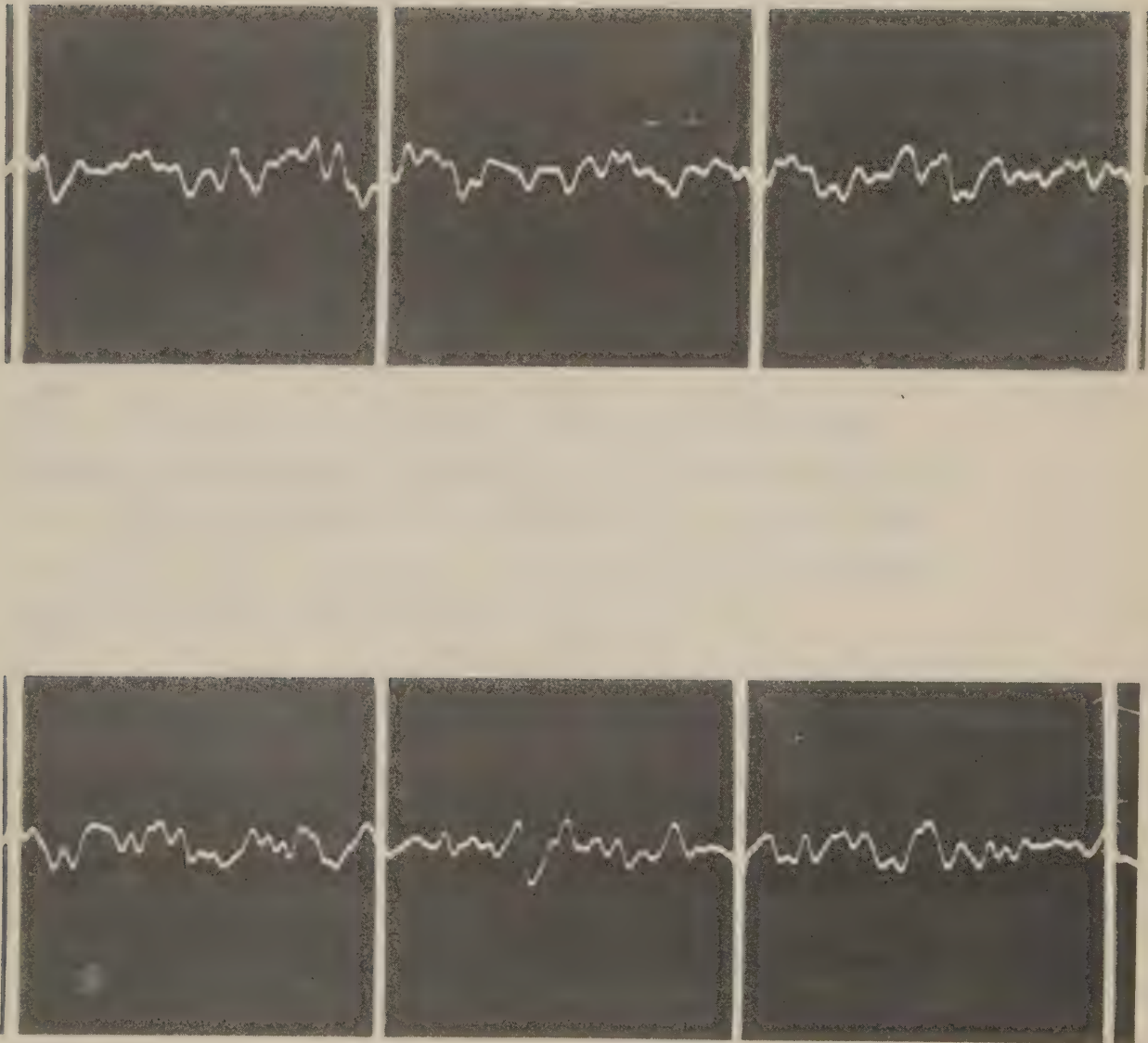


Fig. VII

"Si on observe un phénomène à travers un appareil linéaire aperi-
riodique à grande constante de temps, les fluctuations du
phénomène initial sont considérablement altérées et prennent
l'aspect Laplacien " .

L'ensemble structure-strainage constitue un filtre à grande
constante de temps qui peut être considéré comme linéaire dans
la zone de variation de la contrainte .

Dans l'expression de $\gamma = \frac{\sigma_a}{\sigma_R - \sigma_m}$ intervient seulement le maximum
de la contrainte. Il y a donc lieu de rechercher tout d'abord
la loi de répartition des maxima d'une fonction aléatoire
Laplacienne

On peut se servir pour cela d'un procédé utilisé par S.O. RICE
(16) dans l'analyse du bruit.

Soit une fonction $y = F(a_1, a_2, \dots, a_n; x)$ où les a_i sont
des variables aléatoires. Pour un échantillon donné de a_i

$y(x)$ représente une courbe. Prenons un petit intervalle
 $[x_1 - x_1 + dx]$ et considérons un échantillon particulier de a_i .

Soit $p(\xi, \eta, x)$ la densité de probabilité pour les variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = F(a_1, a_2, \dots, a_n; x) \\ \eta = \frac{\partial F}{\partial x} \end{array} \right. \quad (85)$$

ξ et η sont des variables aléatoires fonctions des a_i et
du paramètre x . Le dx étant très petit, toutes les courbes
passant dans la petite bande $[x_1 - x_1 + dx]$ et correspondant
à des échantillons de a_i différents, peuvent être confondues
avec les droites d'équation :

$$y - \xi = \eta(x - x_1)$$

Si l'on cherche les zéros de y on a pour $y = 0$

$$x = x_1 - \frac{\xi}{\eta}$$

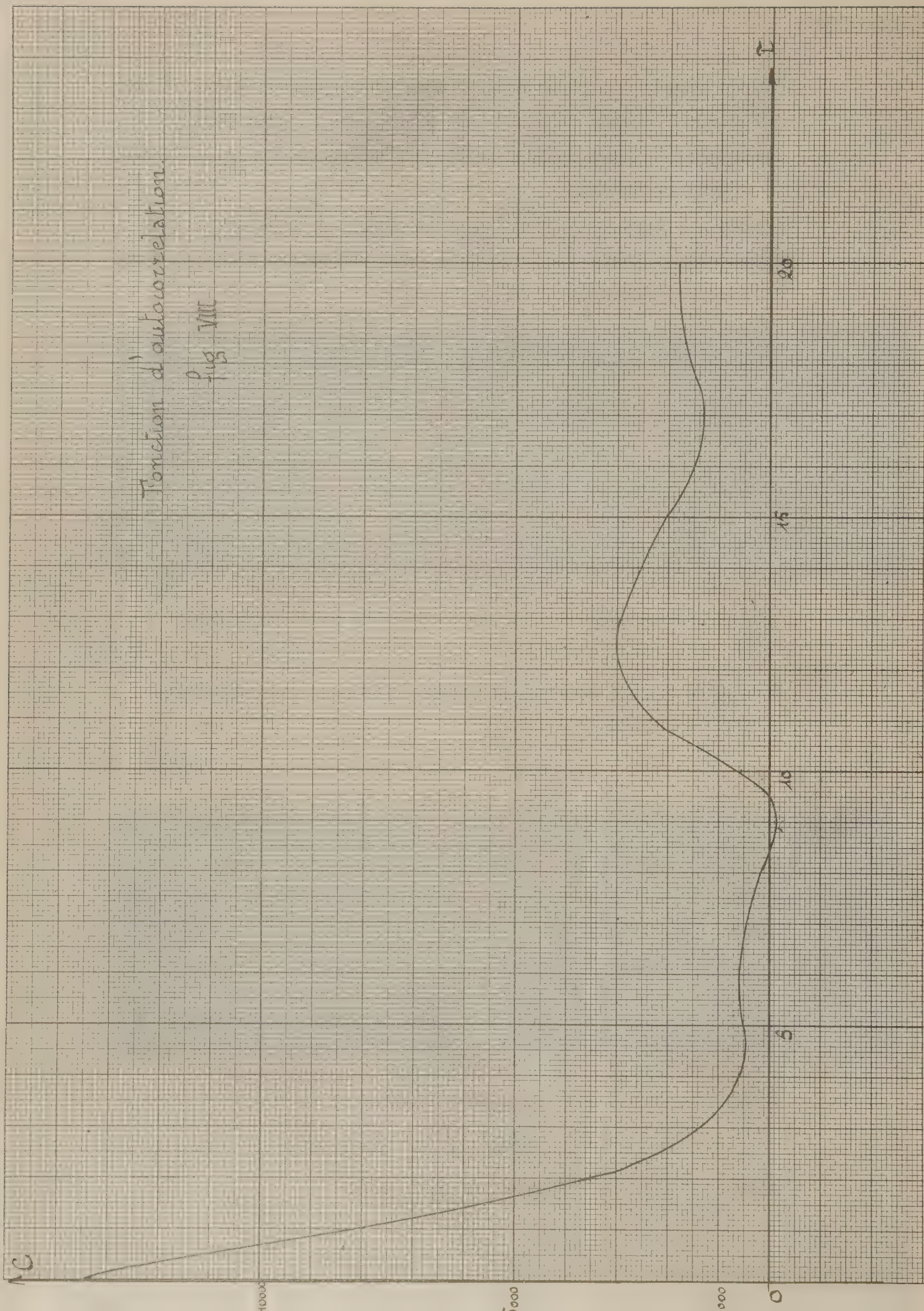
ξ et η doivent être de signes opposés et on a :

$$x_1 < x_1 - \frac{\xi}{\eta} < x_1 + dx$$

soit :

$$-\eta dx < \xi < 0 \quad (86)$$

Fonction d'autocorrelation
fig. VIII



Si cette inégalité est satisfaite la courbe a un zéro situé entre x_1 et $x_1 + dx$ et la probabilité qu'il en soit ainsi est

$$\int_0^{\infty} d\eta \int_{-\eta dx}^0 p(\xi, \eta; x_1) d\xi = \int_0^{\infty} [0 - (-\eta dx)] p(0, \eta; x_1) d\eta$$

soit :

$$+ dx \int_0^{\infty} \eta p(0, \eta; x_1) d\eta$$

Si au lieu des zéros de la fonction, on cherche la probabilité des maxima, c'est-à-dire des zéros de la dérivée, on considère de même :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = F'(a_1, a_2, \dots, a_m; x) \\ \eta = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=x_1} \\ \zeta = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{x=x_1} \end{array} \right. \quad (87)$$

et la probabilité que $y(x)$ ait un maximum dans le rectangle

$x_1 - x_1 + dx$; $y_1 - y_1 + dy$ est :

$$- dx_1 dy_1 \int_{-\infty}^0 \zeta p(y_1, 0, \zeta) d\zeta \quad (88)$$

On peut, à partir de l'enregistrement de $\Gamma(t)$ évaluer la fonction d'autocorrélation $\Psi(t)$ de cette fonction. Le résultat est représenté fig. VIII. Cette fonction permet de calculer les différents moments de ξ, η, ζ . On a :

$$\begin{array}{lll} \bar{\xi}^2 = \Psi_0 & \bar{\eta}^2 = -\Psi_0'' & \bar{\zeta}^2 = \Psi_0^{(4)} \\ \bar{\xi}\eta = 0 & \bar{\eta}\zeta = 0 & \bar{\zeta}\xi = \Psi_0'' \end{array} \quad (89)$$

et la matrice des moments s'écrit :

$$M = \begin{vmatrix} \Psi_0 & 0 & \Psi_0'' \\ 0 & -\Psi_0'' & 0 \\ \Psi_0'' & 0 & \Psi_0^{(4)} \end{vmatrix} \quad (90)$$

..../

Le déterminant de cette matrice et les cofacteurs intéressants sont

$$|M| = -\Psi_0'' (\Psi_0 \Psi_0^{(4)} - \Psi_0''^2)$$

$$M_{11} = -\Psi_0'' \Psi_0^{(4)} ; \quad M_{13} = \Psi_0''^2 ; \quad M_{33} = -\Psi_0'' \Psi_0$$

La densité de probabilité s'écrit alors, puisque $\xi = \sigma(t)$

$$p(\sigma, 0, \xi) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} |M|^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2|M|} (M_{11} \sigma^2 + M_{33} \xi^2 + 2 M_{13} \sigma \xi) \right\} \quad (91)$$

et en reportant cette expression dans (88) il vient : ⁽¹⁾

$$p = \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{M_{33}} \left[|M|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{M_{11}}{2|M|} \sigma_a^2} + M_{13} \left(\frac{\pi}{2 M_{33}} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma_a e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_a^2}{\Psi_0}} \left(1 + \exp \frac{M_{13} \sigma_a}{[2|M| M_{33}]^{\frac{1}{2}}} \right) \right] d\sigma_a dt \quad (92)$$

On peut remarquer que :

$$\frac{M_{11}}{|M|} = \frac{\Psi_0^{(4)}}{\Psi_0 \Psi_0^{(4)} - \Psi_0''^2} = \frac{1}{\Psi_0 - \Psi_0''^2 / \Psi_0^{(4)}} > \frac{1}{\Psi_0}$$

par conséquent si σ_a est assez grand, et ce seront évidemment les seuls à intervenir dans l'apparition de la fatigue :

$$e^{-\frac{M_{11}}{|M|} \cdot \frac{1}{2} \sigma_a^2} \ll e^{-\frac{1}{\Psi_0} \cdot \frac{1}{2} \sigma_a^2}$$

De plus dans ce cas $1 + \exp \frac{M_{13} \sigma_a}{[2|M| M_{33}]^{\frac{1}{2}}}$ est voisin de la valeur 2. On peut donc se contenter de l'expression approchée suivante :

$$\frac{1}{2\pi \Psi_0} \left[-\frac{\Psi_0''}{\Psi_0} \right]^{\frac{1}{2}} \sigma_a e^{-\frac{\sigma_a^2}{2\Psi_0}} d\sigma_a dt \quad (93)$$

On sait que γ est proportionnel à σ_a pour un σ_m donné, soit $R = \sigma_R - \sigma_m$; $\sigma_a = R \gamma$ et en reportant dans (93) il vient :

$$\frac{R^2}{2\pi \Psi_0} \left[-\frac{\Psi_0''}{\Psi_0} \right]^{\frac{1}{2}} \gamma e^{-\frac{R^2}{2\Psi_0} \gamma^2} d\gamma dt$$

Dans l'unité de temps la probabilité $p(\gamma) d\gamma$ que γ soit compris entre γ et $\gamma + d\gamma$ aura donc pour expression :

$$p(\gamma) d\gamma = \frac{R^2}{2\pi \Psi_0} \left[-\frac{\Psi_0''}{\Psi_0} \right]^{\frac{1}{2}} \gamma e^{-\frac{R^2}{2\Psi_0} \gamma^2} d\gamma \quad (94)$$

A partir de cette expression il est facile de trouver la fonction de densité de probabilité des paramètres K et α liés à γ par les expressions :

$$K = M(1-\gamma)(\gamma-\gamma_0)$$

$$\alpha = \frac{c}{f_1} \frac{e^{B/\gamma}}{\gamma-\gamma_0}$$

L'expression de α fait intervenir la fréquence f_1 d'application de la charge. Cette quantité est ici aléatoire puisque par seconde le nombre de maxima est variable. On se contentera d'utiliser une valeur moyenne de cette variable que l'on peut obtenir de la façon suivante.

On a vu que l'ensemble structure-strainage constitue en fait un filtre passe-bas. Cherchons quelle est, dans l'intervalle $t_1 - t_2$, l'espérance mathématique du nombre de maxima, en utilisant l'expression (91).

En intégrant d'abord par rapport à ζ_a on trouve :

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{M_{11}^{-1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \zeta \exp \left\{ -\frac{\zeta^2}{2|M|} \left(M_{33} - \frac{M_{13}}{M_{11}} \right) \right\} d\zeta = \frac{(t_2-t_1)}{2\pi} \left[\frac{\psi_0^{(4)}}{-\psi_0''} \right]^{1/2}$$

L'espérance mathématique du nombre de maxima par sec. est donc :

$$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\psi_0^{(4)}}{-\psi_0''} \right]^{1/2}$$

Par ailleurs, si on appelle $\omega(f_1)$ la densité spectrale de $\sigma(t)$, cette expression s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\psi_0^{(4)}}{-\psi_0''} \right]^{1/2} = \left[\frac{\int_0^\infty f_1^4 \omega(f_1) df_1}{\int_0^\infty f_1^2 \omega(f_1) df_1} \right]^{1/2}$$

pour un filtre de bande il vient entre les fréquences de coupure

$$f_a \text{ et } f_b \quad \left[\frac{3}{5} \cdot \frac{f_b^5 - f_a^5}{f_b^3 - f_a^3} \right]^{1/2}$$

Dans le cas présent $f_a = 0$ et f_b est la fréquence de coupure du filtre structure strainage, on prendra donc si f_c est cette fréquence :

$$f_1 = \left[\frac{3}{5} \right]^{1/2} f_c = 0,775 f_c$$

(95)

Plutôt que d'exprimer les fonctions de répartition de K et α il semble plus simple d'effectuer le remplacement de K et α par leur expression en fonction de γ dans la fonction de densité de probabilité de $\frac{1}{T_L}$ qui ne dépend plus alors que d'un seul paramètre γ .

La densité de probabilité de T s'écrit :

$$g(T) dT = \frac{1}{\Gamma(K)} e^{-\frac{T}{\alpha}} \frac{T^{K-1}}{\alpha^K} dT$$

Si on pose

$$V = \frac{1}{T} \quad T = \frac{1}{V} \quad ; \quad dT = -\frac{1}{V^2} dV$$

la densité de probabilité de V s'écrit :

$$h(V) dV = -\frac{1}{\Gamma(K)} e^{-\frac{1}{\alpha V}} \cdot \frac{1}{\alpha^K V^{K+1}} dV \quad (96)$$

Dans cette expression K et α doivent être remplacés, et $h(V) dV$ s'écrit $h(V, \gamma) dV$ expression dans laquelle γ est aléatoire. On obtiendra l'expression définitive de la densité de probabilité $m(V) dV$ en écrivant :

$$m(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(V, \gamma) p(\gamma) d\gamma \quad (97)$$

Dans les calculs précédents on a considéré, pour ne pas compliquer l'écriture, que γ pouvait varier de $-\infty$ à $+\infty$.

En fait, il y aurait lieu de remplacer les distributions précédentes par des distributions tronquées, γ ne pouvant varier qu'entre γ_0 et 1.

En résumé, le calcul de la distribution de y pourra être mené de la façon suivante :

1° - Etablissement à partir de l'enregistrement de $\nabla(t)$ de la fonction d'autocorrélation $\psi(\tau)$.

2° - Calcul des moments et établissement de la distribution de probabilité de γ compris entre γ_0 et 1.

$$p\left[\gamma \mid \gamma_0 \leq \gamma \leq 1\right] = \frac{\gamma e^{-\frac{R^2}{2\psi_0} \gamma^2}}{\int_{\gamma_0}^1 \gamma e^{-\frac{R^2}{2\psi_0} \gamma^2}} \quad (98)$$

..../

3° - Etablissement de la distribution de $v = \frac{1}{T}$ pour γ certain

$$h(v) dv = -\frac{1}{T(K)} e^{-\frac{1}{\alpha v}} \cdot \frac{1}{\alpha^K v^{K+1}} dv$$

4° - Etablissement de la distribution pour :

$$K = M(1-\gamma)(\gamma-\gamma_0)$$

$$\alpha = \frac{c}{0,775 f_c} \frac{e^{B/\gamma}}{\gamma - \gamma_0}$$

5° - Distribution pour γ aléatoire distribué suivant (98)

$$m(v) = \int_{\gamma_0}^1 h(v, \gamma) p(\gamma) d\gamma$$

6° - Fonction caractéristique de $m(v)$

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} e^{itv} m(v) dv$$

7° - Fonction caractéristique de y

$$\bar{\Phi}(t) = [\varphi(t)]^n \quad n = \tau$$

8° - Inversion de $\bar{\Phi}(t)$ et loi de répartition de y .

Ce calcul ne peut être effectué analytiquement mais il peut être facilement programmé.

On voit de plus que la valeur de σ_{m1} peut varier, il suffit d'en tenir compte dans la valeur de R . Dans ce cas, on aurait plusieurs fonctions caractéristiques $\varphi_j(t)$; si n_j désigne le nombre d'unités de temps que dure la valeur σ_{m1} on aura

$$\bar{\Phi}(t) = [\varphi_1(t)]^{n_1} \dots [\varphi_\tau(t)]^{n_\tau} \quad (99)$$

tel que :

$$\sum_{j=1}^{\tau} n_j = \tau$$

La loi de répartition de T , temps jusqu'à la rupture, sera donné par τ/y de la même façon que dans le cas discret précédent.

On est donc en possession, sous réserve de vérification des hypothèses d'indépendance et d'addition des endommagements, d'un modèle permettant d'obtenir la fonction de répartition des durées de vie d'une éprouvette quelque soit le régime d'application de la contrainte.

Le dernier pas à franchir est d'établir le procédé permettant de passer d'une éprouvette particulière à une structure quelconque.

CHAPITRE VIII

DUREE DE VIE D'UNE STRUCTURE

Bien que les phénomènes de fatigue se manifestent dans tous les domaines d'emploi des constructions métalliques, celui de l'aéronautique est particulièrement atteint parce qu'il rassemble les conditions optimales d'apparition des ruptures de fatigue, tout au moins depuis la mise en service des avions à réaction. Au cours du dernier symposium tenu à Amsterdam au mois de Juin 1959 (17) sur les essais de fatigue des structures entières, M. Herbert F. HARDRATH du N.A.S.A. (USA) mettait l'accent sur les raisons de cet accroissement de sensibilité à la fatigue : "Une des raisons les plus importantes - disait-il - est l'utilisation de contraintes élevées dans le dessin des structures, rendue possible par un accroissement progressif des caractéristiques de rupture statique des alliages d'aluminium utilisés dans la construction. Malheureusement, les propriétés de tenue à la fatigue des nouveaux matériaux n'ont pas été en même temps améliorées de façon sensible. De plus, de nombreux changements opérationnels ont augmenté les possibilités d'apparition de la fatigue. Alors que les avions anciens volaient à des vitesses inférieures à celles pour lesquelles ils étaient calculés, les avions actuels volent à des vitesses très voisines de leur vitesse limite, ces conditions rendent plus intenses les effets des surcharges occasionnelles rencontrées. En outre, l'augmentation de la qualité des aides à la navigation font qu'un avion passe plus d'heures par jour en opération et dans des conditions atmosphériques plus sévères. Pour les avions militaires enfin, l'augmentation des accélérations et leur répétition aggravent sérieusement le problème de la fatigue".

.... /

Devant ce tableau assez inquiétant de ce qui attend l'avion trans ou supersonique, la réaction des constructeurs, et SUD-AVIATION n'y a pas manqué, a été de mettre au point des montages plus ou moins compliqués et perfectionnés pour éprouver la tenue de la structure complète sous des charges variées et aussi voisines que possible de la réalité. D'où les deux aspects principaux des exposés présentés au symposium d'Amsterdam :

- l'étude des charges variables : existence et reproduction,
- les résultats des tests - exploitation.

La première partie est purement technologique et nous laisserons de côté cet aspect du problème, l'existence de charge variable ayant fait l'objet du chapitre précédent quant à leur incidence sur la représentation des durées de vie en fatigue d'un élément.

Le problème le plus important est posé par le deuxième aspect. Comment estimer la tenue en fatigue d'une structure entière ? Par un test global mais forcément limité à un exemplaire en raison du coût très élevé d'une telle expérimentation ou bien par des tests multiples sur des composants de la structure ?

Il est certain que les deux solutions permettent à leur opposant de présenter des objections sérieuses : Comment tirer des conclusions statistiques valables en n'essayant qu'une seule éprouvette constituée dans ce cas par l'avion complet ? Peut-être peut-on espérer qu'au bout d'un certain nombre d'années, en mettant en commun les résultats obtenus, on arrivera à constituer un échantillon sur lequel on pourra travailler statistiquement. A quelle population pourra-t-on alors rattacher un tel échantillon ?

D'un autre côté l'essai des éléments de structure pose un problème de conditions aux limites qu'il est important mais difficile de résoudre, si l'on veut pouvoir extrapoler ensuite convenablement les résultats obtenus. Cette difficulté semble justifier la méfiance de la majorité des participants du Congrès d'Amsterdam, envers ces essais.

Aussi faut-il attendre le dernier exposé, celui de B.K.O. LUNDBERG pour qu'apparaisse le mot "quantitatif". Il est bien certain en effet que l'approche du problème de la fatigue des structures, limitée à un essai portant sur un échantillon d'un seul exemplaire, aussi spectaculaire qu'il puisse être, ne peut permettre dans ce domaine que des observations qualitatives.

Le choix entre ces points de vue semblerait impossible et tout compromis introuvable, si un examen plus approfondi ne le faisait apparaître en définitive comme un faux dilemme.

Il semble en effet que la notion de durée de vie ne puisse être extrapolée sans aménagement de l'éprouvette élémentaire que l'on monte sur une machine d'essais en laboratoire à l'élément important de structure ou à la structure complète. Il est bien arrivé que l'on essaie jusqu'à la rupture, sur des dispositifs spécialement conçus des éléments importants : gouvernes d'avion et même plans complets. Quels résultats attendre de tels essais ? A partir du moment où une défectuosité est apparue en un point quelconque de la structure, y-a-t-il lieu de pousser l'essai jusqu'à la rupture totale ? Evidemment non. La durée de vie en fatigue d'une structure ne correspond pas à sa rupture mais à l'apparition de défectuosités définies de manière appropriée. C'est ainsi que parallèlement à la mise en oeuvre de moyen d'essais de plus en plus puissants, se sont élaborées deux notions qui, bien que provenant du domaine aéronautique, semblent valables pour n'importe quelle structure. Il s'agit des définitions de ce qu'on a appelé les structures "Safe life" et "Fail safe".

On peut prendre comme définitions celles qui ont été données par le Professeur LUNDBERG précédemment cité.

Une structure SAFE-LIFE est une structure à laquelle on impose d'avoir une probabilité très faible de devenir défectueuse au bout d'une durée de service déterminée : "la durée de vie en sécurité" sans qu'il soit pour cela nécessaire d'effectuer des inspections⁽¹⁾ ou d'installer des dispositifs de détection automatique des défectuosités locales.

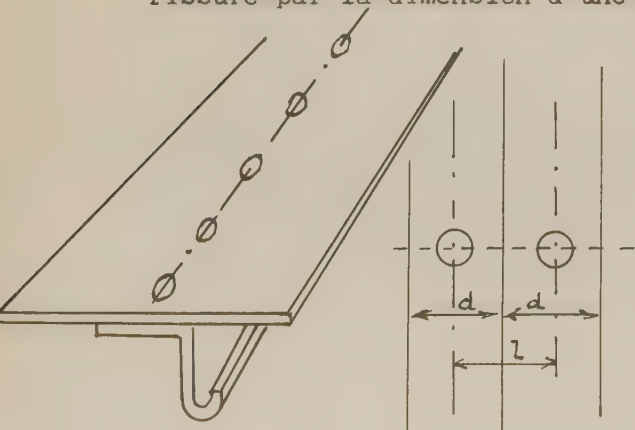
(1) Voir ANNEXE VI.

Une structure FAIL-SAFE est une structure à laquelle on impose d'avoir une probabilité très faible de devenir défectueuse, en combinant des caractéristiques de dessin telles que une ou plusieurs défauts partiels entraînant une réduction prévisible de la contrainte de rupture statique, ou un affaiblissement de quelque autre propriété essentielle à la sécurité du vol, puissent être détectées grâce à des visites périodiques ou des dispositifs de détection automatique.

En ce qui concerne le problème actuellement posé, la distinction entre ces deux définitions est sans importance. Ce qui, par contre, est essentiel, c'est qu'elles attachent l'une et l'autre la sécurité de la structure à la notion de défaut local.

Il est facile de définir théoriquement la condition physique d'une telle sécurité. On peut en effet poser qu'en aucun cas la longueur de la fissure ne doit être telle que la portion restante d'élément considéré ne soit soumise à des efforts dépassant la limite de résistance statique. Mais cette condition simple en apparence implique que soient connus ou définis un certain nombre de paramètres.

Tout d'abord la longueur de la fissure. Elle dépend évidemment du nombre K : nombre de fissures élémentaires, mais il serait nécessaire pour aller plus loin, de connaître quelque chose sur la structure du nombre M dont nous avons supposé qu'il pourrait servir à décrire la nature de l'élément soumis au phénomène de fatigue. En attendant que des investigations ultérieures aient permis d'apporter quelques précisions à ce propos ; on peut se contenter d'une approximation un peu plus sévère en remplaçant la longueur de la fissure par la dimension d'une éprouvette élémentaire fictive.



Considérons par exemple un panneau de revêtement de cabine pressurisée dans un fuselage. On pourra adopter une éprouvette de largeur d telle que, si l est le pas de la soudure σ_R la contrainte de rupture statique, T la charge e l'épaisseur de la tôle, on ait :

$$\frac{T}{e(l-d)} \leq \sigma_R$$

On a, avec les relations précédemment établies, et connaissant F une expression immédiate de la durée de vie en fatigue d'une éprouvette fictive composant l'élément.

Chaque structure posera ainsi un problème de découpage. Un des conférenciers du symposium d'Amsterdam faisait justement remarquer que les fissures de fatigue prennent naissance en des points de concentration de contrainte obligatoire tels que les trous de rivet, soudures, congés de raccordement, etc ... Chaque structure pourra ainsi se décomposer en plusieurs éprouvettes fictives élémentaires semblables ou dissemblables.

Soit $F_n(T)$ la fonction de répartition de l'une de ces éprouvettes, c'est-à-dire la fonction donnant la probabilité pour que le temps de rupture soit plus petit que T . La probabilité que l'on n'observe pas de rupture sur une éprouvette déterminée avant T sera égale à $1 - F_n(T)$, et la probabilité pour qu'il en soit de même pour les éprouvettes composant la structure sera $[1 - F_n(T)]^n$. On aura donc la fonction de répartition de la durée de vie de la structure, probabilité que l'on enregistre au moins une défectuosité pour $T \leq t$ en calculant :

$$H(T) = 1 - [1 - F_n(T)]^n$$

dans le cas où les éprouvettes fictives sont déterminées de façon identique.

Cette identité toutefois n'est pas parfaite en raison de l'hétérogénéité du métal quel qu'il soit, et il y aura lieu d'en tenir compte en considérant que la contrainte de rupture statique n'est pas une constante mais est une variable aléatoire.

L'étude de la distribution statistique des résistances a été faite par Monsieur Robert LEVI dans la référence 18). Elle aboutit à une loi logarithme normale, elle permet également de tenir compte des dimensions transversales et longitudinales de l'éprouvette essayée.

Cette distribution interviendra donc pour modifier la distribution de χ

On a vu que cette dernière s'écrivait : $\frac{R^2}{2\psi_0} \gamma^2$

$$p\left[\gamma \mid \gamma_0 < \gamma < 1\right] = \frac{\gamma e^{-\frac{R^2}{2\psi_0} \gamma^2}}{\int_{\gamma_0}^1 \gamma e^{-\frac{R^2}{2\psi_0} \gamma^2} d\gamma}$$

dans laquelle $R = \sigma_R - \sigma_m$

Si σ_R est distribué suivant une loi log. normale $R + \sigma_m$ l'est également. Soit $f(R) dR$ cette loi, alors γ a pour distribution :

$$q(\gamma) d\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\gamma, R) f(R) dR$$

Le problème de la sécurité d'une structure se trouve ainsi entièrement déterminé sous réserve que soient précisées les conditions de définition de l'éprouvette fictive. La fonction de répartition des durées de vie en fatigue, fonction de Pearson type III est en réalité, dans sa définition initiale, la fonction de répartition des durées nécessaires pour qu'apparaissent K fissures élémentaires. Pour une éprouvette simple ce nombre K correspond à la rupture. Mais cette identité entre nombre de fissures élémentaires et rupture n'est pas obligatoire et la fonction de Pearson type III est particulièrement apte à représenter la distribution des durées nécessaires pour atteindre une longueur de fissure donnée correspondant à la somme de K fissures élémentaires. Ce qui n'a pu être déterminé jusqu'à présent et qui doit par conséquent s'inscrire dans un programme ultérieur, c'est la nature de cette fissure élémentaire fictive qui permettrait d'obtenir le nombre K à introduire dans la fonction de répartition pour une longueur de crique donnée. Il reviendrait au même, d'ailleurs, de connaître la structure du paramètre M tel que :

$$K = M(1-\gamma)(\gamma-\gamma_0)$$

en fonction des caractéristiques physiques de l'éprouvette fictive adoptée.

Est-ce à dire, du fait de cette attitude devant la définition de la durée de vie des structures, que les essais des structures complètes soient sans intérêt ? Certainement non, ils présentent au contraire un intérêt majeur, à condition toutefois que les résultats à en attendre soient parfaitement définis.

...../

Il faut évidemment rayer de ces résultats l'obtention d'un renseignement d'ordre quantitatif concernant la durée de vie. Mais pour aboutir à une étude complète de cette durée de vie, deux renseignements importants sont nécessaires :

- la localisation des zones de concentration de contrainte,
- la connaissance quantitative de la contrainte locale.

Un seul essai de la structure complète peut donner ces renseignements. Le premier d'ordre qualitatif doit compléter ce que le simple examen du dessin permet d'établir. Beaucoup plus important est le second domaine de résultats.

Le calcul de bureau d'étude peut donner une idée des contraintes mais les structures hyperstatiques extrêmement compliquées des avions modernes ne permettent pas une analyse suffisamment poussée pour avoir une connaissance précise des contraintes locales. A cela s'ajoute que au bout d'un certain nombre d'application d'efforts variables, l'ensemble de la structure se déforme, sa fonction de transfert se modifie et les contraintes locales changent de valeur. Seule une mesure de cette fonction de transfert permettra d'obtenir les contraintes locales à partir d'une charge extérieure variable. C'est ce qui peut être fait au cours d'un essai pendant suffisamment longtemps, au besoin avec des programmes de charge variables représentant des cas de vols très différents de façon à étudier les différentes cartes de contraintes possibles. Ce point de vue, s'il utilise les moyens actuels mis en oeuvre pour les essais de fatigue des avions complets, modifie sensiblement le programme des mesures à effectuer. Si il nécessite moins d'inspections, et par conséquent simplifie notablement le déroulement de l'essai, il impose par contre un planning de mesures beaucoup plus développé que celui adopté jusqu'à présent. En même temps, il donne un intérêt nouveau à ce genre d'essais.

Connaissant les contraintes locales et les zones dangereuses en fatigue, il devient possible d'appliquer les définitions précédentes et de mener à bien l'étude complète de la durée de vie en fatigue ainsi que la mise sur pied d'un programme d'inspections périodiques pour satisfaire à une définition "Fail-Safe".

CHAPITRE IX

EN CONCLUSION : UN PROGRAMME D'ETUDE

Au terme de cette étude, il apparaît que le problème de la représentation des durées de vie des structures peut être résolu de façon précise à l'aide d'un modèle que les chapitres précédents ont permis d'élaborer.

Ce modèle a été bâti au moyen d'un petit nombre de paramètres dont certains ont une structure inconnue. Cette structure dépend de tous les paramètres qui ont été jusqu'à présent étudiés pour caractériser les "limites de fatigue". Malheureusement leur étude dépend de celle de la variable principale : la durée de vie qui est aléatoire. Elle ne peut donc être effectuée que par des méthodes statistiques; ce qui implique un grand nombre d'essais. Toutefois, et c'est ce qui constitue l'intérêt de ce modèle, cette étude statistique peut être faite une fois pour toute, parce qu'elle aboutit à définir des constantes physiques à partir desquelles le modèle peut être reconstruit chaque fois qu'on en a besoin.

Etant donné le souci majeur des études précédentes : la courbe de Wöhler, c'est à dire peu de points pour chaque valeur de la contrainte et beaucoup de valeurs différentes de cette contrainte, il est bien évident qu'on ne peut rechercher dans les résultats existants les données nécessaires à l'étude des paramètres de notre modèle. De plus, les essais doivent évidemment être conçus en fonction des hypothèses faites sur la structure du paramètre étudié. Si l'on veut par exemple étudier l'influence de la section de l'éprouvette sur la valeur du paramètre K c'est-à-dire sur la structure de la constante M , il faudra établir plusieurs statistiques suffisamment importantes sur des éprouvettes dont la section variera, toutes les autres caractéristiques, dont la contrainte, restant constantes.

Le modèle présenté a introduit un certain nombre de paramètres nouveaux, mais leur étude n'est pas indépendante du but global à atteindre. Bien mieux, ils permettent de faire la synthèse des résultats acquis en reliant les phénomènes déjà connus dans le domaine de la fatigue à un modèle mathématique dont la validité a été démontrée expérimentalement. Dans ces conditions, l'intérêt d'un programme d'étude paraît évident. Ce programme pourrait comporter par exemple les étapes suivantes :

Pour un métal donné dont les caractéristiques sont bien définies, statistiquement, et en particulier dont on a étudié la répartition des efforts de rupture statique :

- M
- 1) Etude de la variation avec la section de l'éprouvette,
 - 2) Etude d'un indice de forme, coefficient d'entaille,
 - 3) Influence de l'état de surface - du sens des fibres - de la corrosion.

- δ
- 1) Etude de la nature de l'effort appliqué alterné - répété ondulé, et de l'influence exacte de la compression.
 - 2) Etude des efforts moins simples : cisaillement, flexion rotative, etc

δ_0 Variation de ce paramètre lorsque la qualité de δ varie (voir ci-dessus).

C, B Variabilité de ces paramètres avec les caractéristiques définies ci-dessus. Les mêmes statistiques sont utilisables pour M , C et B .

M, C, B, δ_0 Variabilité de l'ensemble des paramètres avec la température.

Ce programme doit être répété pour chacun des matériaux les plus fréquemment utilisés. Il en résulte un ensemble de valeurs permettant, à partir d'une charge extérieure donnée variable, de déterminer la répartition des durées de vie en fatigue d'une structure donnée composée d'éléments divers de matériaux connus.

.... /

La connaissance de ces constantes permet également de résoudre le problème du dimensionnement des pièces devant tenir en fatigue pour une charge que l'on suppose donnée. Les notions de *safe-life* et *fail-safe*, nous l'avons vu, font intervenir la valeur de la probabilité. Pour une probabilité donnée les paramètres K et α sont fonction de la contrainte γ et de la section ainsi que de l'indice de forme de l'éprouvette fictive qu'il est possible de définir dans la structure envisagée. Si γ est donnée ainsi que l'indice de forme, la section se trouve ainsi déterminée en fonction de la durée de vie de l'élément.

Le programme d'étude ainsi défini est important, chaque statistique doit comporter, pour être valable, un minimum d'une cinquantaine d'éprouvettes, pour les valeurs faibles de K , ce nombre augmentant pour les grandes valeurs de K . Un ordre de grandeur minimum pour l'étude complète d'un métal pourrait être de dix mille éprouvettes, dans un premier essai, ce chiffre diminuant sensiblement pour les autres en tenant compte des résultats formels obtenus avec le premier.

Il y a lieu d'insister sur le fait que cette dépense constituerait un acquis que des études ultérieures pourraient compléter mais non invalider, et qui serait suffisant pour représenter le comportement de l'ensemble des réalisations courantes du point de vue de la fatigue.

Il s'agit, en fait, d'un investissement permettant d'élucider le fonctionnement des phénomènes de fatigue jusqu'au point où les résultats connus pourront être utilisés rationnellement tant pour le dimensionnement des structures nouvelles que pour la mise en place des périodicités de tous ordres : inspections, rechanges, réparations, pendant la vie de la structure. Si on évalue à 100 nouveaux francs en moyenne le coût de l'essai de fatigue d'une éprouvette - fabrication, essai, dépouillement - c'est environ 1 million de nouveaux francs par type de matériau qu'il serait nécessaire d'investir pour aboutir à la création d'une méthode d'emploi rationnelle d'un modèle permettant de maîtriser les phénomènes de fatigue des structures.

Bien entendu ces résultats n'intéressent pas seulement l'industrie aéronautique mais l'ensemble des constructions métalliques soumises à des charges variables dans le temps avec une fréquence moyenne élevée.

BIBLIOGRAPHIE

- 1) LA FATIGUE DES METAUX - R. CAZAUD - DUNOD 1959
- 2) THE LOGNORMAL DISTRIBUTION - AITCHISON J. - BROWN J.A.C. - CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS 1951
- 3) STATISTICS OF EXTREMES - GUMBEL E.J. - COLUMBIA UNIVERSITY PRESS 1958
- 4) ON THE STATISTICAL INTERPRETATION OF FATIGUE TESTS - FREUDENTHAL A.M. et GUMBEL E.J. - PROC. ROY. SOC. A Vol. 216 - 1953 page 309
- 5) APPLICATIONS OF THE THEORIE OF EXTREME VALUES IN FRATURE PROBLEMES EPSTEIN B.J. - STAT. ASS. Vol. 43 - 1948
- 6) PHYSICAL AND STATISTICAL ASPECTS OF FATIGUE - FREUDENTHAL A.M. - GUMBEL E.J. - ADVANCES IN APPLIED MECHANICS - Vol. 4, également : DISTRIBUTION FUNCTIONS FOR THE PREDICTION OF FATIGUE LIFE AND FATIGUE STRENGHT - Intern. Conf. on Fatigue of Metals - BRITISH INSTITUTE OF MECHANICAL ENGINEER - London 1956
- 7) A STATISTICAL MODEL FOR LIFE LENGTH OF MATERIALS - BIRNBAUM Z.W. et SAUNDERS S.C. - JOURNAL OF THE AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION - Vol. 53 - 1958
- 8) THE PHENOMENA OF RUPTURES AND FLOWS IN SOLIDS - GRIFFITH A.A. - PHIL. TRANS. ROY. SOC. (London) ser. A - Volume 221 - Mars 1921
- 9) THEORY OF REVERSIBLE AND NO REVERSIBLE CRAKS IN SOLID - Y.I. FRENKEL - NACA T.M. 1387 - April 1955
- 10) THE SPLITTING STRENGHT OF MICA - OBREIMOFF J.W. - PROC. ROY - SOC (London) - Vol. 127 n° 805 7 May 1930
- 11) SUR LES LOIS DE WOHLER - GILCHRIST - THE ENGINEER Vol. 90 p. 203 (1900)
- 12) ETUDE SUR LA PROPAGATION DES CRIQUES - WEIBULL - F.F.A. n° 65
- 13) THEORIE DES FONCTIONS ALEATOIRES PAR A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET-MASSON Editeur
- 14) ESTIMATING THE PARAMETERS OF A TRUNCATED GAMMA DISTRIBUTION - CHAPMAN, D.G. - ANNALS OF MATHEM. STATISTICS, 27 (1956) 498-506
- 15) STATIC STRENGHT AND FATIGUE PROPERTIES OF UNNOTCHED CIRCULAR 75 ST SPECIMENS - SUBJECTED TO REPEATED TENSITE LOADING - WALODDI WEIBULL - THE AERONAUTICAL RESEARCH INSTITUTE OF SWEDEN- Report 68 - 1956
- 16) MATHEMATICAL ANALYSIS OF RANDOM NOISE - S.O. RICE - B.S.T.J. 1944 p. 282
- 17) FULL SCALE FATIGUE TESTING OF AIRCRAFT STRUCTURES - PERGAMON PRESS 1961
- 18) LA DISTRIBUTION STATISTIQUE DES RESISTANCES AUX FORCES DE COMPRESSION OU DE TRACTION SIMPLE - Robert LEVI - Travaux Sciences et Industries n° 277 - Nov. 57

A N N E X E I

1°/ RESULTATS D'ESSAIS DE FATIGUE SUD-AVIATION AU PALIER 0,5

N° Eprouvette	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
1	484 972 800	A	0,7	0,4	35.600	
		B	1,2	1,2	36.600	
		C	2	2	37.600	
		D	4	4	38.600	
	485 012 300				39.500	
2	485 015 800	2A	0,8	0	40.200	
		2B	1	0,3	41.200	
		2C	1	0,5	42.200	
		2D	1,5	0,6	43.200	
		2E	1,6	0,8	44.200	
		2F	1,9	1	45.200	
		2G	2	1,5	46.200	
		2H	3	2	47.200	
		2I	4	4	48.200	
		2J	5	5	49.200	
		2K	9	9	50.200	
	485 066 300				50.500	
3	485 066 800					
	Cricque visible	3A	2	4,5	38.300	
		3B	3	4,5	39.300	
		3C	4	5,8	40.300	
		3D	7	7,5	41.300	
	485 108 700				41.900	Rupture
						/

N° Eprouvette	Relevé compte tours	N° cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
4	485 114 300 cricque visible	4A	0,5	2		35.000
		4B	0,9	2,5		36.000
		4C	1	2,9		37.000
		4D	1,3	4		38.000
		4E	4,5	4,8		39.000
		4F	9	9		40.000
	485 154 600				Rupture	40.300
5	485.155.200	5A	0,8	0,8	38.000	
		5B	1,1	1,1	39.000	
		5C	1,8	1,6	40.000	
		5D	2,1	2	41.000	
		5E	3	3	42.000	
		5F	4,5	4,5	43.000	
	485 199 000				43.800	Rupture
6	485 201 400	6A	0,3	0,5	35.700	
		6B	0,4	1	36.700	
		6C	0,5	1,1	37.700	
		6D	0,5	2	38.700	
		6E	0,5	2	39.700	
		6F	1	2	40.700	
		6G	1	2,5	41.700	
		6H	1,5	3	42.700	
		6I	2,8	5	43.700	
		6J	8	9	44.700	
	485 246 400				45.000	Rupture
						/

N° Eprouvette	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
7	485 248 700	7A	2	0,5	53.300	
		7B	2,5	1	54.300	
		7C	3	1,5	55.300	
		7D	3,5	2	56.300	
		7E	3,5	3	57.300	
		7F	6	4,5	58.300	
		7G	11,5	9	59.300	
	485 308 300				59.600	Rupture
8	485 311 100	8A	1	0,5	23.500	
		8B	1,4	0,5	24.500	
		8C	1,6	0,6	25.500	
		8D	2,5	1,5	26.500	
		8E	3	2,6	27.500	
		8F	4,5	3,5	28.500	
		8G	7,5	7,5	29.500	
	485 341 100				30.000	Rupture
9	485 342 800	9A	0	0	20.000	
		9B	0	0	21.000	
		9C	0	0	22.000	
		9D	0,5	0	23.000	
		9E	0,8	0,3	24.000	
		9F	1	0,5	25.000	
		9G	1,5	0,6	26.000	
		9H	1,8	1,2	27.000	
		9I	2,6	2,5	28.000	
		9J	3,8	3,4	29.000	
		9K	5,5	5,3	30.000	
	485 373 600				30.800	Rupture
						 /

N° Eprouvette	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
10	485 375 500	10A	0,5	0,3	32.000	
		10B	0,8	0,5	33.000	
		10C	1,4	1	34.000	
		10D	1,8	1,6	35.000	
		10E	3	2,8	36.000	
		10F	3,8	3,7	37.000	
		10G	5	6	38.000	
	485.414 300				38.800	Rupture
11	485 416 000	11A	0,2	0,6	30.500	
		11B	0,4	0,7	31.500	
		11C	0,6	1	32.500	
		11D	0,9	1,1	33.500	
		11E	2,8	3	34.500	
		11F	5,5	5,5	35.500	
	485 452 100				36.100	Rupture
12	485 453 500	12A	0,4	0,6	27.100	
		12B	0,7	1,1	28.100	
		12C	1,1	1,8	29.100	
		12D	1,7	2	30.100	
		12E	1,8	3,2	31.100	
		12F	4,5	5	32.100	
		12G	11,5	11,2	33.100	
	485 486 800				33.300	Rupture
						 /

N° Eprouvette	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
13	485 488 700	13A	0,5	0,1	31.000	
		13B	1,1	0,6	32.000	
		13C	1,3	1,4	33.000	
		13D	1,6	1,5	34.000	
		13E	3,1	3,7	35.000	
		13F	6,4	5,5	36.000	
	485 525 200				36.500	Rupture
14	485 528 500	14A	0,1	0,8	26.300	
		14B	0,1	1,2	27.300	
		14C	0,1	1,8	28.300	
		14D	0,1	1,9	29.300	
		14E	0,4	2,4	30.300	
		14F	1,5	3,2	31.300	
		14G	2,5	4,5	32.300	
	485 562 100	14H	8	9,5	33.300	
					33.600	Rupture
15	485 563 500	15A	0,5	0,2	36.600	
		15B	1,3	0,6	37.600	
		15C	1,4	1	38.600	
		15D	2	1,5	39.600	
		15E	2,5	2,5	40.600	
		15F	3,5	3,5	41.600	
		15G	6	6	42.600	
	485 606 700				43.200	Rupture
						/

N° Eprouvette	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
16	485 608 000	16A	1	0,5	33.400	Rupture
		16B	1,2	0,5	34.400	
		16C	1,5	1	35.400	
		16D	1,9	1,9	36.400	
		16E	3	3	37.400	
		16F	4,5	4	38.400	
		16G	11,5	10,5	39.400	
	485 647 600				39.600	
17	485 649 000	17A	0,5	0,5	36.500	Rupture
		17B	1	1	37.500	
		17C	2,5	4	38.500	
		17D	5	5,6	39.500	
	485 689 300				40.300	
18	485 690 600	18A	1	0,5	33.700	Rupture
		18B	1	0,5	34.700	
		18C	1,8	1,2	35.700	
		18D	2	2	36.700	
		18E	3,5	3,5	37.700	
		18F	7	7	38.700	
	485 729 700				39.100	
19	485 731 300	19A	0,5	0,2	27.300	Rupture
		19B	1	0,5	28.300	
		19C	1,1	0,7	29.300	
		19D	1,1	1,1	30.300	
		19E	2	2	31.300	
		19F	5,5	5,5	32.300	
	485 764 400				33.100	
						/

N° Eprouvette	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de la cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
20	485 764 400					
	485 813 000	20A	2	2	48.600	
	4 000	20B	3,5	3,5	49.600	
	5 000	20C	4	4	50.600	
	6 000	20D	7	6,5	51.600	
	485 816 700				52.300	Rupture
21	485 816 700					
	485 847 000	21A	1,5	0,5	30.300	
		21B	1,8	0,6	31.300	
		21C	2	0,7	32.300	
		21D	2,5	1,2	33.300	
		21E	3,2	2,2	34.300	
		21F	4	3,5	35.300	
		21G	7	6	36.300	
	485 853 700				37.000	Rupture
22	485 853 700					
	485 894 000	22A	1	0,4	40.300	
		22B	1,5	1	41.300	
		22C	2	1	42.300	
		22D	2,5	1,8	43.300	
		22E	3	2,5	44.300	
		22F	5	4	45.300	
	485 900 200	22G	10,5	8	46.300	
					46.500	Rupture
23	485 900 300					
	485 927 000	23A	1	0,6	26.700	
		23B	2	2	27.700	
		23C	3,5	3	28.700	
	485 929 800				29.500	Rupture
						/

N° Eprouvette	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
24	485 929 900					
	485 954 000	24A	0,6	0,6	24.100	
		24B	1	1	25.100	
		24C	1,5	1,5	26.100	
		24D	2,5	1,5	27.100	
		24E	3,5	3,7	28.100	
		24F	6,5	8,5	29.100	
	485 959 300				29.400	Rupture
25	485 959 400					
	485 982 000	25A	0,2	0,3	22.600	
		25B	1	1	23.600	
		25C	1,1	1,1	24.600	
		25D	1,5	1,5	25.600	
		25E	1,8	1,5	26.600	
		25F	2	2	27.600	
		25G	2,6	2,1	28.600	
		25H	3	3	29.600	
		25I	4	4,5	30.600	
		25J	5	7	31.600	
		25K	9	11	32.600	
	485 992 100				32.700	Rupture
26	485 992 300					
	486.024 000	26A	0,2	0	31.700	
		26B	0,3	0	32.700	
		26C	0,5	0	33.700	
		26D	0,8	0,1	34.700	
		26E	1	0,2	35.700	
		26F	1,1	0,3	36.700	
		26G	1,7	0,5	37.700	
		26H	1,9	1,3	38.700	
						 /

N° Eprouvette	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
26 (suite)	486 035 500	26I	2	2	39.700	Rupture
		26J	4	2,6	40.700	
		26K	5	3,5	41.700	
		26L	7,5	6	42.700	
					43.200	
27	486 035 600	27A	0,1	0,2	36.400	Rupture
		27B	0,1	0,7	37.400	
		27C	0,4	1,1	38.400	
		27D	1,1	2	39.400	
		27E	2	2,2	40.400	
		27F	2,5	2,5	41.400	
		27G	4	4	42.400	
		27H	7	6,3	43.400	
	486 079 400				43.800	
28	486 079 500	28A	0,1	2	37.500	Rupture
		28B	0,1	2	38.500	
		28C	0,2	2,3	39.500	
		28D	0,3	3	40.500	
		28E	1	4	41.500	
		28F	4	5	42.500	
		28G	6	6,5	43.500	
	486 123 800				44.300	
29	486 123 900	29A	0,6	0,6	33.100	Rupture
		29B	1	1	34.100	
		29C	2	2	35.100	
		29D	3	3	36.100	
		29E	4	4	37.100	
	486 161 900				38.000	
						/

N° Eprouvette	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
30	486 162 000	30A	0,6	0,2	29.000	
	486 191 000	30B	1,1	1	30.000	
		30C	1,5	1,5	31.000	
		30D	2,3	2,7	32.000	
		30E	4,5	3	33.000	
		30F	7	4,5	34.000	
	486 196 700				34.700	
						Rupture
31	486 196 800	31A	0,1	1,1	30.200	
	486 227 000	31B	0,5	1,8	31.200	
		31C	1	2	32.200	
		31D	1,5	2	33.200	
		31E	2	2,5	34.200	
		31F	3	3	35.200	
		31G	4,5	6	36.200	
	486 233 900				37.100	
						Rupture
32	486 234 000	32A	1	1	31.000	
	486 265 000	32B	1,1	1	32.000	
		32C	1,2	1,5	33.000	
		32D	1,7	1,5	34.000	
		32E	2	2	35.000	
		32F	3	2,4	36.000	
		32G	5	3,5	37.000	
		32H	7	5	38.000	
	486 272 500				38.500	
						Rupture
33	486 272 600	33A	1	1,5	22.400	
	486 295 000	33B	1	2	23.400	
		33C	1,1	2,7	24.400	
		33D	3	3,2	25.400	
		33E	5	5	26.400	
	486 299 800				27.100	
						Rupture

N° Eprouvette	Relevé Compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
34	486 299 900 486 330 000	34A	0,4	0,9	30.100	
		34B	0,9	1,4	31.100	
		34C	1	1,5	32.100	
		34D	2	2	33.100	
		34E	3	3	34.100	
		34F	4,5	4,5	35.100	
		34G	12	12	36.100	
	486 336 100				36.200	Rupture
35	486 336 200 486 372 000	35A	0,5	2,7	35.800	
		35B	1	3,2	36.800	
		35C	1.5	3,4	37.800	
		35D	3	5	38.800	
		35E	6	6,4	39.800	
	486 376 700				40.500	Rupture
36	486 376 800 486 401 000	36A	0,4	0	24.200	
		36B	1	0,1	25.200	
		36C	1,1	0,2	26.200	
		36D	1,4	0,7	27.200	
		36E	2	0,8	28.200	
		36F	2,5	1,8	29.200	
		36G	3	2,1	30.200	
		36H	4	3,4	31.200	
		36I	5,2	4,3	32.200	
		36J	9	8,5	33.200	
	486 410 300				33.500	Rupture
						 /

N° Eprouvette	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
37	486 412 300	37A	0,2	1	27.700	
	486 440 000	37B	0,5	1,1	28.700	
		37C	1	1,6	29.700	
		37D	1,2	1,6	30.700	
		37E	1,5	1,8	31.700	
		37F	2	2,5	32.700	
		37G	3,5	4,5	33.700	
		37H	6,5	6,5	34.700	
	486 447 600				35.300	
						Rupture
38	486 447 700	38A	0,5	0,5	31.300	
	486 479 000	38B	0,6	1	32.300	
		38C	1	1	33.300	
		38D	1,2	1,3	34.300	
		38E	2	2	35.300	
		38F	3	3	36.300	
		38G	3,5	3,5	37.300	
		38H	7	7	38.300	
	486 486 400				38.700	
						Rupture
39	486 486 500	39A	0,5	0,5	28.500	
	486 515 000	39B	1	1	29.500	
		39C	1,5	1,5	30.500	
		39D	2	2	31.500	
		39E	3	3	32.500	
		39F	4	4	33.500	
		39G	7,5	7	34.500	
	486 521 600				35.100	
						Rupture
						/

N° Eprouvette	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
40	486 521 700	40A	0,8	0,7	32.300	Rupture
	486 554 000	40B	1	1	33.300	
		40C	1,4	1,3	34.300	
		40D	1,8	1,8	35.300	
		40E	2	2	36.300	
		40F	4,5	4,5	37.300	
		40G	8	8	38.300	
	486 560 300				38.600	
41	486 560 400	41A	1	1	28.600	Rupture
	486 589 000	41B	1,8	1,5	29.600	
		41C	2,1	2	30.600	
		41D	3	2,8	31.600	
		41E	4,5	4,2	32.600	
	486 590 800				33.400	
42	486 595 700	42A	0,1	0,3	26.300	Rupture
	486 622 000	42B	0,3	0,6	27.300	
		42C	0,9	0,9	28.300	
		42D	1,5	1,5	29.300	
		42E	2	2	30.300	
		42F	3	3	31.300	
		42G	5,5	6	32.300	
	486 628 700				32.900	
						/

N° Epreuve	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
43	486 628 800	43A	0,3	0,3	30.200	Rupture
	486 659 000	43B	0,9	0,9	31.200	
		43C	1	1	32.200	
		43D	1,2	1,2	33.200	
		43E	2	2	34.200	
		43F	2,5	2,7	35.200	
		43G	4	4	36.200	
		43H	6,2	6,2	37.200	
	486 666 500				37.700	
44	486 666 600	44A	0,4	0,6	29.400	Rupture
	486 696 000	44B	1,1	1,1	30.400	
		44C	1,8	2,1	31.400	
		44D	2,5	2,5	32.400	
		44E	3	3	33.400	
		44F	4,5	4,5	34.400	
		44G	9	8,5	35.400	
	486 702 300				35.700	
45	486 702 400	45A	1	0,3	27.600	Rupture
	486 730 000	45B	2	0,6	28.600	
		45C	4	4	29.600	
		45D	13	15,5	30.600	
	486 733 300				30.900	
						/

N° Eprouvette	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
46	486 734 800	46A	0,5	0,2	33.800	Rupture
	486 768 000	46B	0,8	0,3	34.800	
		46C	1,9	1	35.800	
		46D	2	1,1	36.800	
		46E	2,8	2	37.800	
		46F	3,5	2,7	38.800	
		46G	4,5	3,5	39.800	
		46H	6,8	6,2	40.800	
	486 775 600				41.400	
47	486 775 700	47A	0,5	0,4	42.300	Rupture
	486 818 000	47B	0,6	0,5	43.300	
		47C	1	0,7	44.300	
		47D	1,2	1,2	45.300	
		47E	2	2	46.300	
		47F	2,2	2,2	47.300	
		47G	3,5	3,5	48.300	
		47H	5	5	49.300	
	486 825 800				50.100	
48	486 825 900	48A	1	1	33.100	Rupture
	486 859 000	48B	1,2	1,1	34.100	
		48C	1,5	1,3	35.100	
		48D	2	2	36.100	
		48E	3	3	37.100	
		48F	4,5	5	38.100	
		48G	9	11	39.100	
	486 865 200				39.300	
						/

N° Epreuve	Relevé compte tours	N° Cliché	Mesure de la longueur de cricque		Nombre de cycles	Remarques
			Haut	Bas		
49	486 865 300	49A	0,1	0,1	29.700	Rupture
	486 895 000	49B	0,2	0,2	30.700	
		49C	0,6	0,6	31.700	
		49D	1	1	32.700	
		49E	2	2	33.700	
		49F	3	3	34.700	
		49G	7,5	6,2	35.700	
	486 901 300				36.000	
50	486 901 700	50A	0,4	0,4	47.300	Rupture
	486 949 000	50B	0,7	0,7	48.300	
		50C	1	1,1	49.300	
		50D	1,5	1,5	50.300	
		50E	2	2	51.300	
		50F	2,2	2,5	52.300	
		50G	3	3	54.300	
		50H	5	5	55.300	
	000				56.300	

2°// RELEVÉ DES ΔN POUR DES LONGUEURS DE CRIQUE EGALES à 1 m/m

Les relevés sont effectués sur les courbes de figures 1 à 5 ci-jointes. On obtient ainsi un échantillon de 600 résultats . Les ΔN sont exprimés en centaines de cycles.

m^o	N_{orig} $g \frac{m}{m}$	$3 \frac{m}{m}$	ΔN $i=1$	$4 \frac{m}{m}$	ΔN $i=2$	$5 \frac{m}{m}$	ΔN $i=3$	$6 \frac{m}{m}$	ΔN $i=4$	$7 \frac{m}{m}$	ΔN $i=5$	$8 \frac{m}{m}$	ΔN $i=6$	$9 \frac{m}{m}$	ΔN $i=7$	$10 \frac{m}{m}$	ΔN $i=8$	$11 \frac{m}{m}$	ΔN $i=9$	$12 \frac{m}{m}$	ΔN $i=10$	$13 \frac{m}{m}$	ΔN $i=11$	$14 \frac{m}{m}$	ΔN $i=12$
1	364	371	7	376	5	380	4	383	3	385	2	386	1	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0
2	433	452	19	464	12	472	8	478	6	483	5	486	3	489	3	492	3	494	2	496	2	498	2	499	1
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	388	0	396	8	401	5	404	3	407	3	409	2	411	2	412	1
4	359	359	0	371	12	378	7	382	4	385	3	388	3	390	2	392	2	394	2	395	1	396	1	397	1
5	387	400	13	408	8	415	7	420	5	424	4	427	3	430	3	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0
6	387	407	20	422	15	429	7	433	4	435	2	437	2	439	2	440	1	441	1	442	1	443	1	444	1
7	538	538	0	548	10	558	10	568	10	575	7	580	5	582	2	584	2	585	1	586	1	587	1	588	1
8	246	259	13	267	8	273	6	277	4	281	4	284	3	287	3	289	2	291	2	292	1	293	1	294	1
9	259	269	10	276	10	282	6	286	4	290	4	293	3	296	3	298	2	301	3	-	0	-	0	-	0
10	336	346	10	353	7	359	6	364	5	369	5	372	3	375	3	378	3	380	2	-	0	-	0	-	0
11	326	334	8	339	5	343	4	346	3	348	2	350	2	352	2	354	2	355	1	-	0	-	0	-	0
12	284	295	11	303	8	309	6	313	4	316	3	318	2	320	2	322	2	324	2	325	1	326	1	327	1
13	323	335	12	342	7	346	4	349	3	351	2	353	2	355	2	357	2	358	1	359	1	360	1	361	0
14	290	302	12	310	8	316	6	320	4	324	4	326	2	327	1	328	1	329	1	330	1	331	1	332	1
15	381	391	10	399	8	405	6	410	5	415	5	419	4	421	2	423	2	425	2	426	1	-	0	-	0
16	347	359	12	365	6	371	6	376	5	379	3	382	3	385	3	387	2	389	2	390	1	391	1	392	1
17	374	380	6	383	3	385	2	387	2	389	2	391	2	393	2	394	1	395	1	-	0	-	0	-	0
18	352	362	10	367	5	371	4	376	5	379	3	382	3	385	3	387	2	389	2	390	1	391	1	392	1
19	298	307	9	313	6	315	2	318	3	319	1	321	2	322	1	323	1	324	1	-	0	-	0	-	0
20	-	-	0	486	0	492	6	497	5	501	4	505	4	508	3	510	2	512	2	514	2	515	1	516	1
21	326	326	0	335	9	341	6	346	5	351	5	354	3	357	3	359	2	361	2	362	1	363	1	-	0

...../

Relevé des ΔN pour des longueurs de crique égales à 1 m/m (suite)

	1.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12													
22	412	425	13	433	8	439	6	444	5	448	4	451	3	453	2	455	2	457	2	458	1	460	2	461	1
23	269	273	4	278	5	281	3	285	4	289	4	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0
24	253	262	9	269	7	274	5	278	4	281	3	283	2	285	2	287	2	288	1	289	1	290	1	291	1
25	240	264	24	277	13	287	10	294	7	300	6	303	4	307	3	310	3	313	3	315	2	317	2	319	2
26	373	384	11	393	9	401	8	406	5	411	5	415	4	418	3	421	3	423	2	425	2	426	1	427	1
27	390	399	9	406	7	412	6	417	5	421	4	424	3	426	2	428	2	430	2	432	2	434	2	435	1
28	375	401	26	410	10	415	5	419	4	422	3	425	3	428	3	430	2	432	2	434	2	435	1	-	0
29	338	346	8	352	6	358	6	363	5	367	4	371	4	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0
30	301	309	8	315	6	321	6	325	4	329	4	332	3	335	3	337	2	339	2	340	1	-	0	-	0
31	314	327	13	338	11	346	8	352	6	355	3	358	3	360	2	361	1	362	1	-	0	-	0	-	0
32	337	348	11	357	9	364	7	368	4	372	4	375	3	377	2	378	1	379	1	380	1	-	0	-	0
33	231	231	0	241	10	248	7	253	5	258	5	261	3	263	2	264	1	265	1	-	0	-	0	-	0
34	311	322	11	331	9	337	6	341	4	345	4	348	3	351	3	353	2	355	2	356	1	357	1	358	1
35	-	-	0	366	0	375	9	381	6	386	5	390	4	393	3	395	2	397	2	398	1	-	0	-	0
36	272	284	12	293	9	301	8	307	6	313	6	317	4	321	4	324	3	326	2	328	2	329	1	330	1
37	295	311	16	322	11	329	7	333	4	336	3	338	2	340	2	342	2	344	2	346	2	347	1	-	0
38	311	337	26	349	12	357	8	363	6	367	4	371	4	374	3	377	3	379	2	381	2	382	1	383	1
39	298	307	9	315	8	321	6	326	5	331	5	335	4	337	2	339	2	341	2	343	2	344	1	345	1
40	333	346	13	355	9	362	7	368	6	371	3	374	3	376	2	378	2	379	1	380	1	381	1	382	1
41	286	296	10	304	8	311	7	316	5	320	4	324	4	327	3	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0
42	285	294	9	302	8	307	5	313	6	316	3	319	3	321	2	322	1	323	1	-	0	-	0	-	0
43	326	337	11	345	8	351	6	356	5	359	3	362	3	365	3	367	2	369	2	371	2	373	2	-	0
44	304	313	9	321	8	327	6	333	6	337	4	341	4	346	4	348	2	350	2	351	1	352	1	353	1
45	282	288	6	291	3	293	2	294	1	295	1	296	1	297	1	298	1	299	1	300	1	-	0	-	0
46	353	363	10	371	8	379	8	387	7	392	6	396	4	400	4	403	3	405	2	407	2	408	1	-	0

.../

Relevé des ΔN pour des longueurs de crique égales à 1 m/m (suite)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12												
47	447	459	12	468	9	474	6	480	6	484	4	487	3	493	3	490	3	493	3	-	0	0	-	0
48	330	352	22	361	9	367	6	371	4	375	4	378	3	382	2	380	2	382	2	384	2	385	1	387
49	327	334	7	339	5	344	5	347	3	349	2	351	2	355	1	354	3	355	1	356	1	357	1	-
50	491	503	12	512	9	520	8	528	8	535	7	541	6	553	6	547	6	553	6	-	0	-	0	-

ΔN est exprimé en nombre de cycles
 i index de la colonne du tableau 2°

3° / STATISTIQUE DES ΔN RELEVES

ΔN	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1500	1600	1900	2000	2200	2400	2600	Total
1	0	0	0	1	0	2	2	3	6	6	5	6	5	0	1	1	1	1	1	2	43
2	0	0	2	0	5	4	4	12	9	4	2	3	1	1							47
3	0	3	1	4	4	19	8	7	1	2											49
4	1	1	5	14	15	9	2	1	0	1											49
5	2	6	11	17	8	3	2														49
6	2	10	22	12	1	1	0	1													49
7	3	19	20	2	2	1															47
8	10	25	9	0	0	1															45
9	15	25	3																		43
10	22	13																			35
11	23	6																			29
12	22	1																			23
$\sum_{i=1}^n$	100	109	73	50	35	40	18	24	16	13	7	9	6	1	1	1	1	1	1	2	508

4°/ RESULTATS CUMULES ET LOGARITHMES NEPERIENS

$l = \Delta N$	$n^{(1)}$	$\log n$	$l = \Delta N$	n	$\log n$
0	508	6,23	1200	14	2,64
100	408	6,01	1300	8	2,08
200	299	5,70	1500	7	1,94
300	226	5,42	1600	6	1,79
400	176	5,17	1900	5	1,6
500	141	4,94	2000	4	1,38
600	101	4,61	2200	3	1,09
700	83	4,41	2400	2	0,69
800	59	4,07	2600	0	0
900	43	3,76			
1000	30	3,40			
1100	23	3,13			

5°/ CALCUL DU COEFFICIENT DE LA DROITE

La droite passe par le point $0 - \log n_0$ soit $0 - 6,23$

elle s'écrit :

$$y = \log n - \alpha l$$

On prend comme deuxième point le point $l = 600$ $\log n = 4,61$

d'où
$$\alpha = \frac{6,23 - 4,61}{600} = 0,0027$$

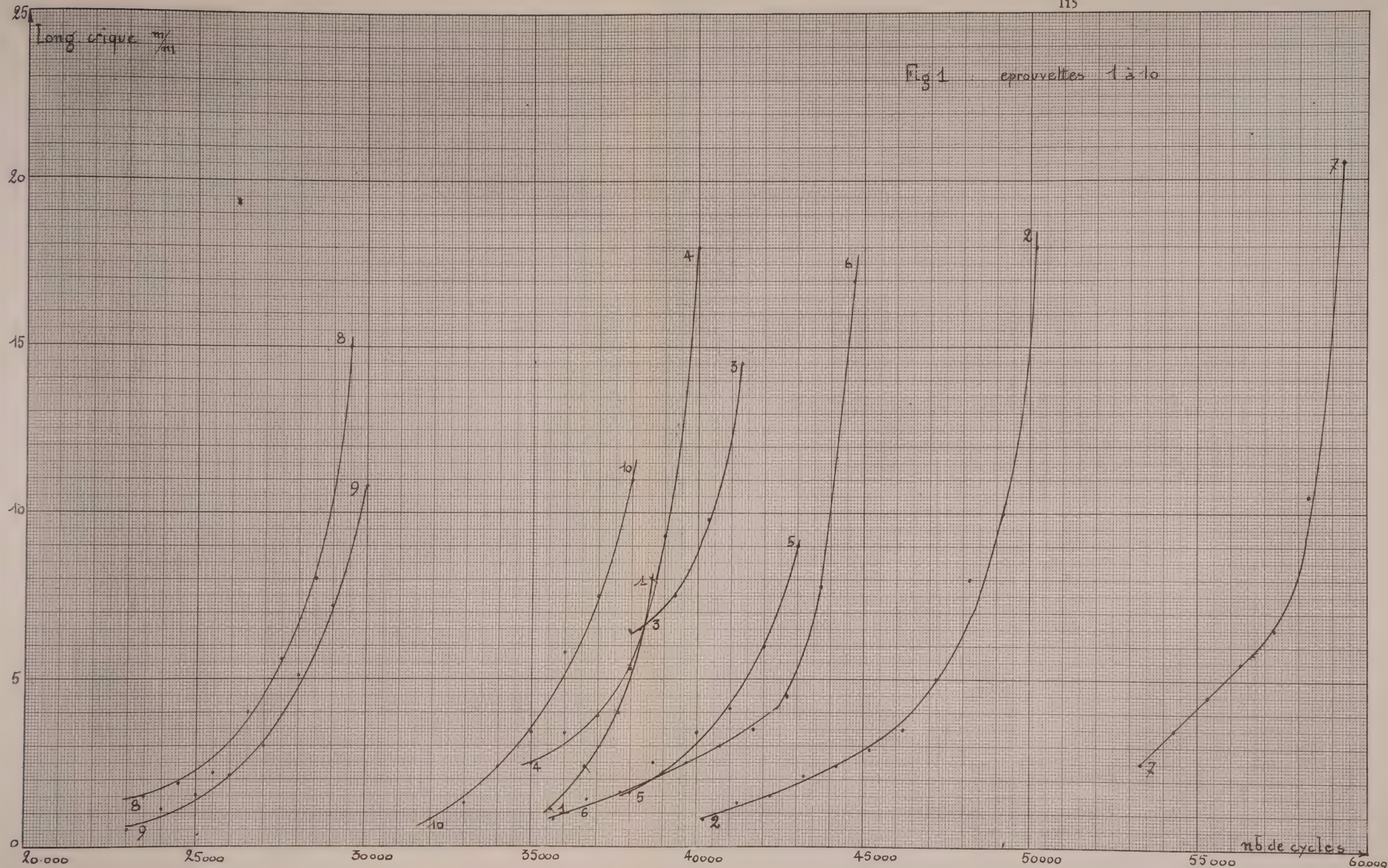
La droite a donc pour équation $y = 6,23 - 0,0027 l$

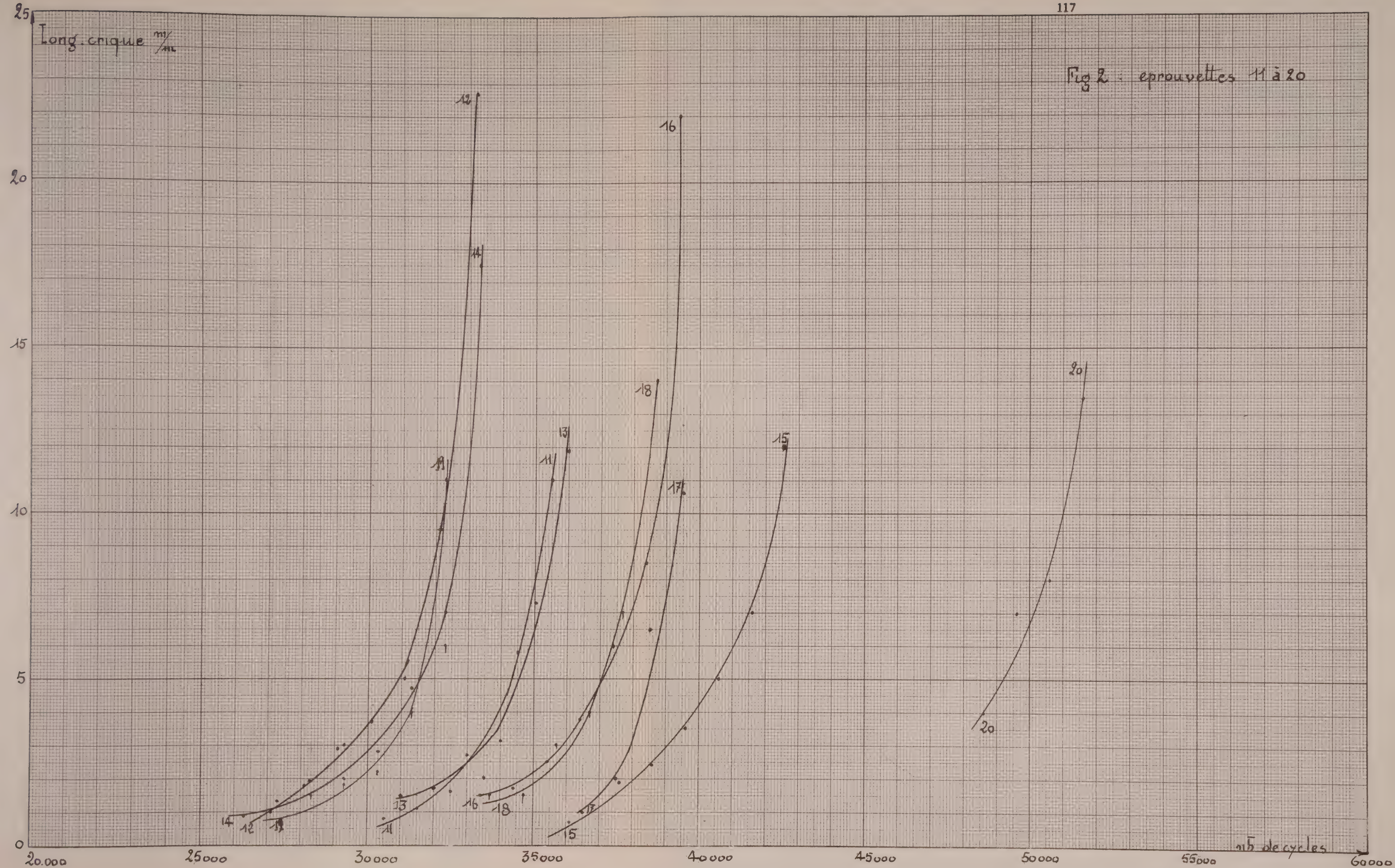
..../

(1) n représente le nombre d'épreuves telles que $l = \Delta N$ soit plus grand que la valeur figurant dans la première colonne .

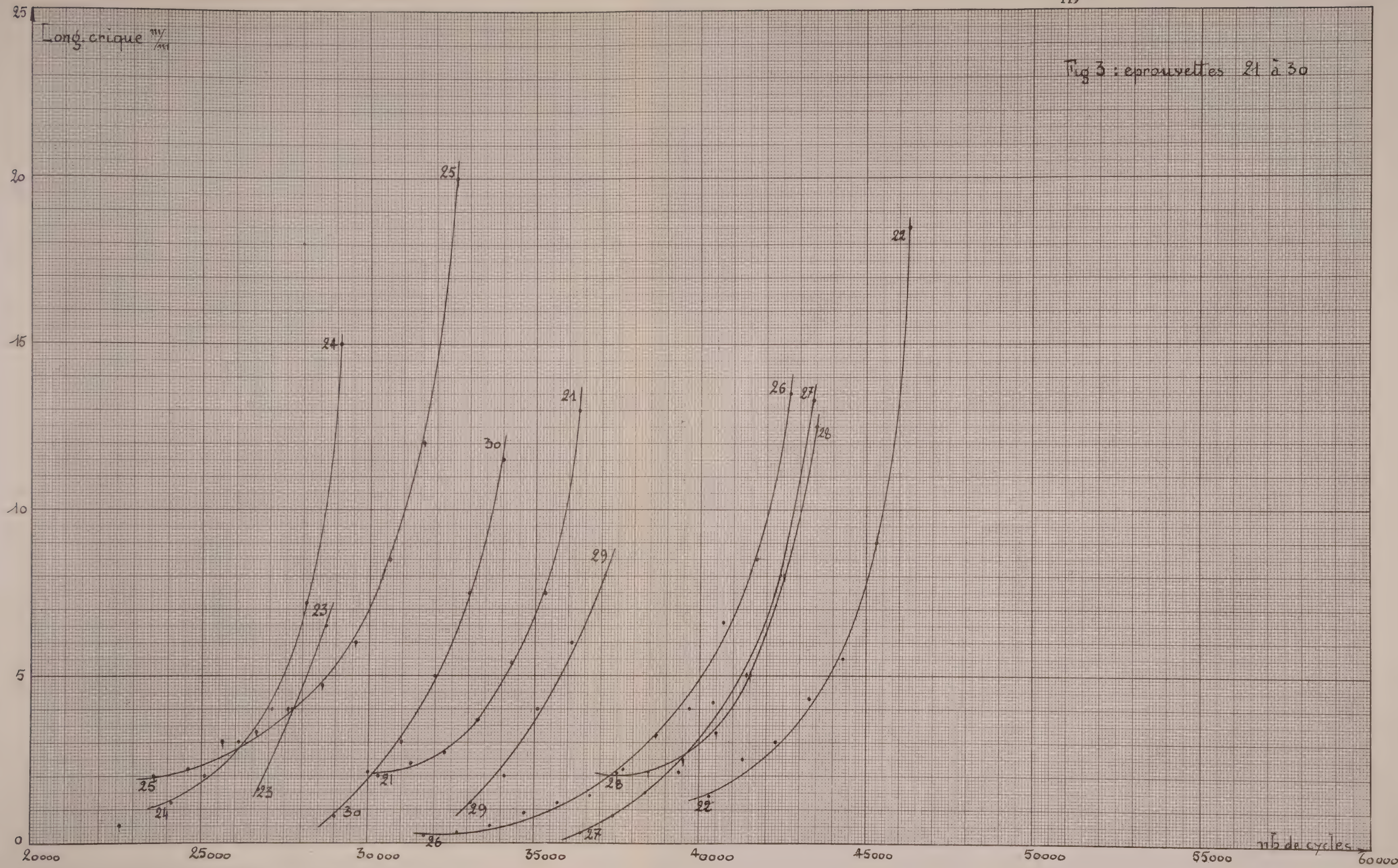
6° / COURBES DE DISPERSION $\chi_{G_1} - \chi_{G_2}$

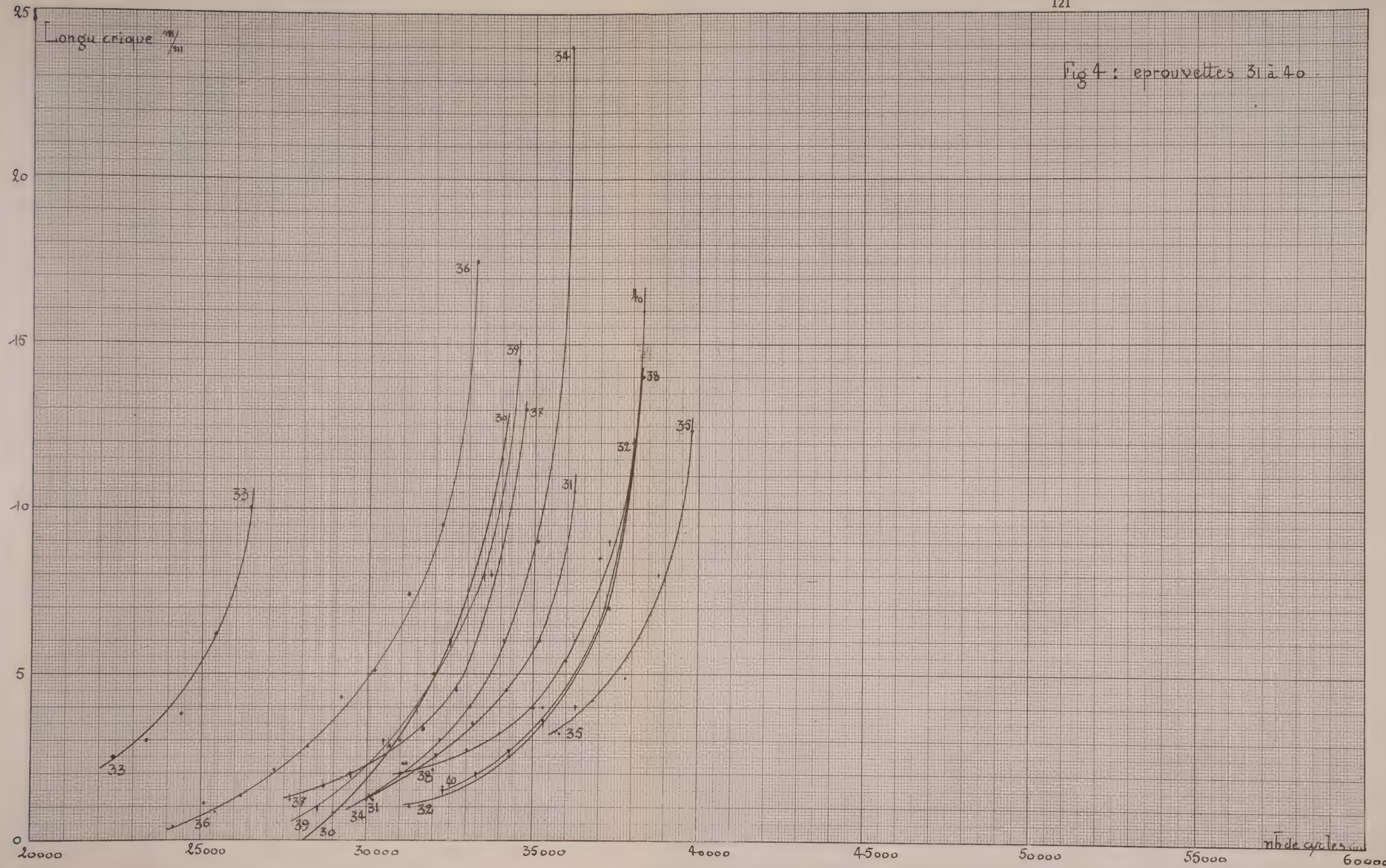
l	$0,0027 \ l$	$\log \ell$	$-0,0027 \ l$	ℓ	$-0,0027 \ l$	$1-\ell$	N	$N e^{-0,0027 \ l}$	H	$\sqrt{R}$	$\chi_{calculé}$	$\chi_{G_1}^-$	$\chi_{G_2}^+$
0	0	1	1	1	0	0	508		0	0			
100	0,27	1,88275	0,7634	0,2366	0,2366	0,7634	408	311,46	0,000759	0,02755	5,96	5,94	5,98
200	0,54	1,76549	0,5827	0,4173	0,4173	0,5827	299	174,22	0,002395	0,04894	5,69	5,64	5,74
300	0,81	1,64823	0,4448	0,5552	0,5552	0,4448	226	100,52	0,005523	0,07431	5,42	5,35	5,49
400	1,08	1,53097	0,3396	0,6604	0,6604	0,3396	176	59,77	0,01104	0,1050	5,15	5,05	5,25
500	1,35	1,41371	0,2592	0,7408	0,7408	0,2592	141	36,54	0,02027	0,1423	4,88	4,74	5,02
600	1,62	1,29646	0,1979	0,8021	0,8021	0,1979	101	19,98	0,04014	0,2003	4,61	4,41	4,81
700	1,89	1,17920	0,1510	0,8490	0,8490	0,1510	83	12,53	0,06767	0,2601	4,34	4,08	4,60
800	2,16	1,06194	0,1153	0,8847	0,8847	0,1153	59	6,80	0,1301	0,3606	4,07	3,71	4,43
900	2,43	2,94468	0,08804	0,91196	0,91196	0,08804	43	3,78	0,2412	0,4911	3,80	3,31	4,28
1000	2,70	2,82742	0,06720	0,93280	0,93280	0,06720	30	2,01	0,4640	0,6812	3,53	2,85	4,21
1100	2,97	2,71016	0,05130	0,94870	0,94870	0,05130	23	1,17	0,8108	0,9004	3,26	2,36	4,16
1200	3,24	2,59291	0,03916	0,96084	0,96084	0,03916	14	0,548	1,7533	1,324	2,99	1,67	4,31
1300	3,51	2,47565	0,02989	0,97011	0,97011	0,02989	8	0,239	4,059	2,014	2,72	0,71	4,73
1500	4,05	2,24113	0,01742	0,98258	0,98258	0,01742	7	0,122	8,0539	2,837	2,18		5,01
1600	4,32	2,12387	0,01330	0,98670	0,98670	0,01330	6	0,0798	12,364	3,516	1,91		5,42
1900	5,13	3,77210	0,005917	0,994083	0,994083	0,005917	5	0,0295	33,697	5,804	1,10		6,90
2000	5,40	3,65484	0,004516	0,995484	0,995484	0,004516	4	0,0180	55,304	7,436	0,83		8,26

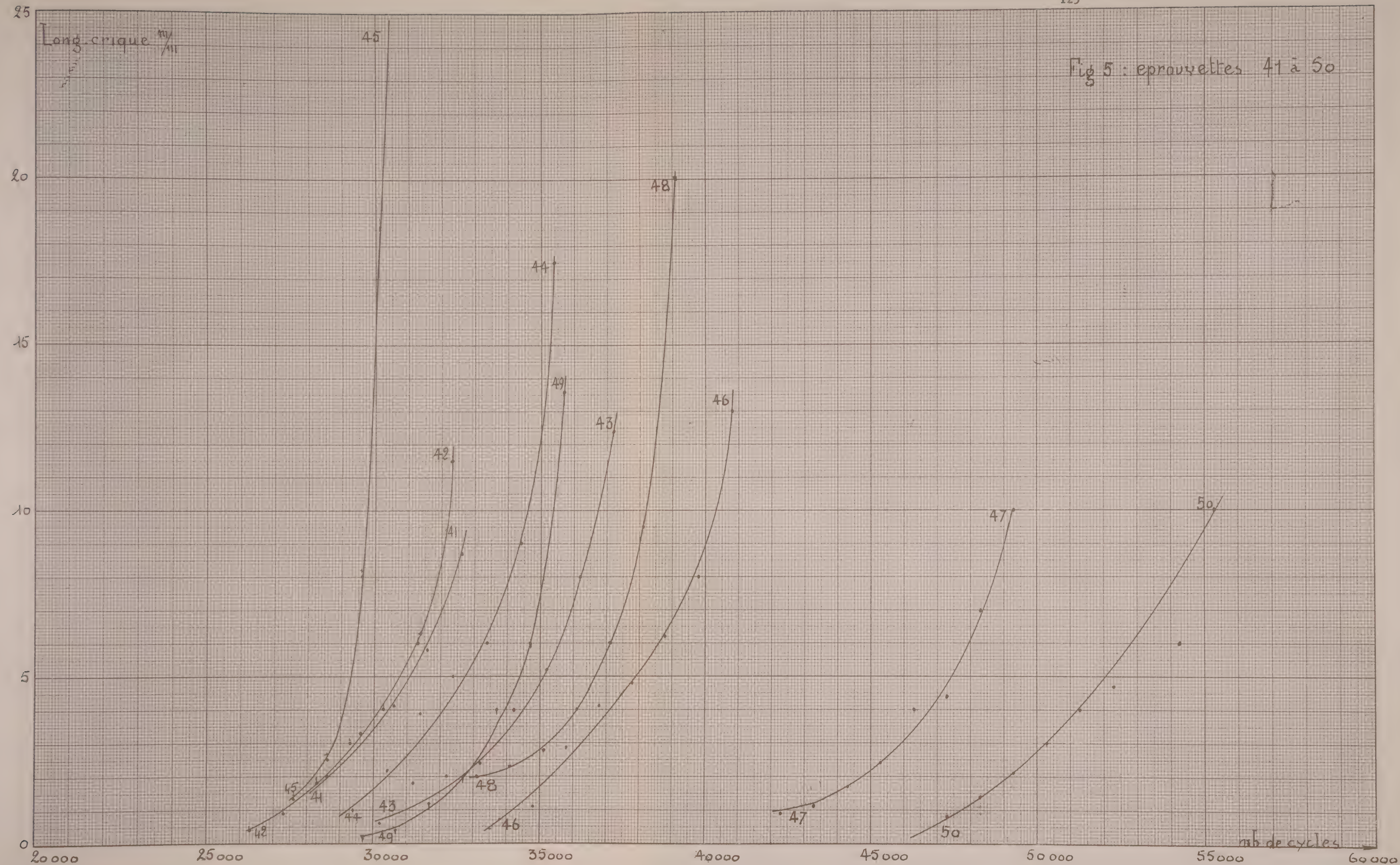












25

Long. crique $\frac{m}{mm}$

Fig 5 : éprouvettes 41 à 50

20

15

10

5

0

20 000

25 000

50 000

55 000

60 000

nb de cycles

42

50

42

50



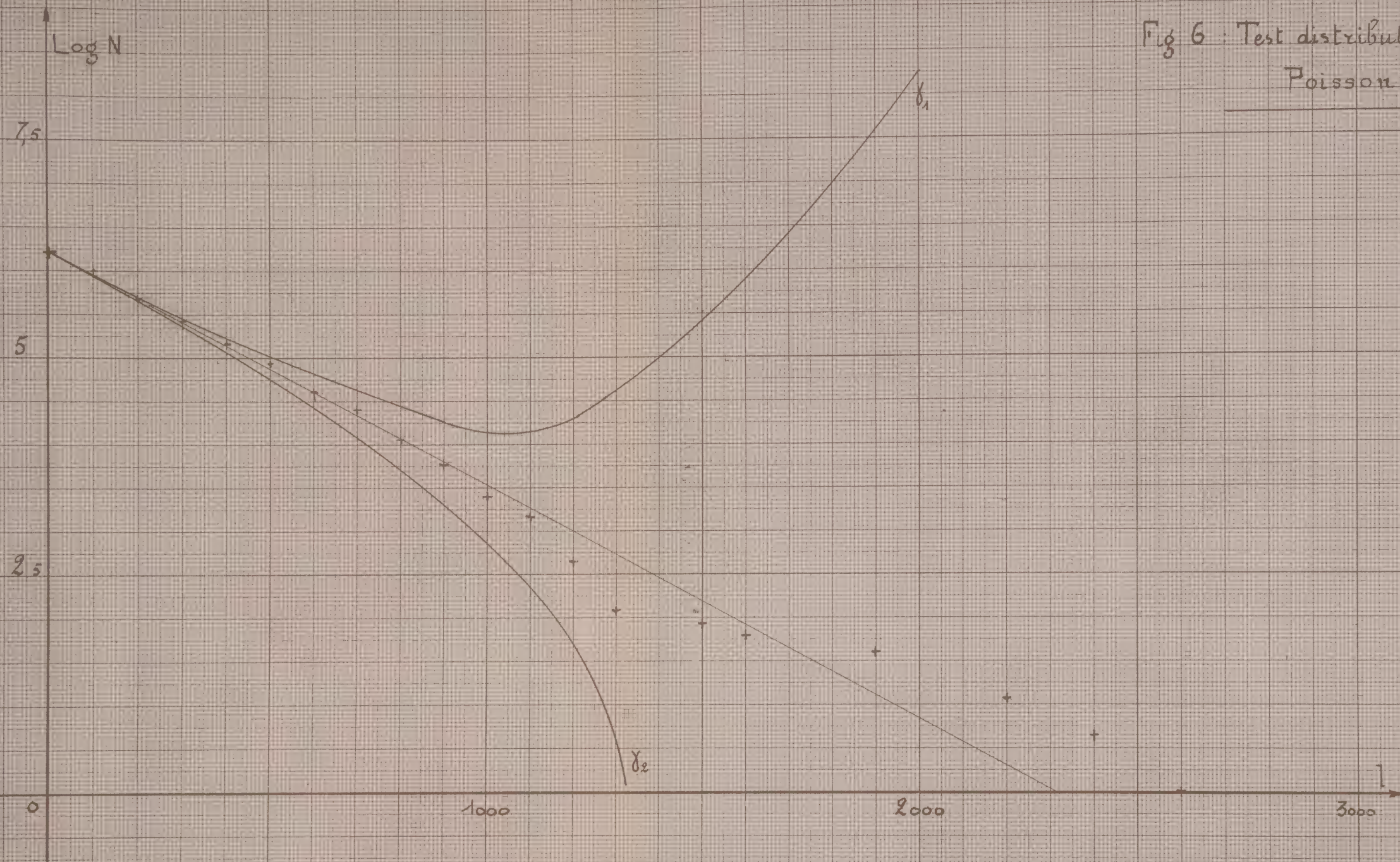


Fig 6 : Test distribution de
Poisson

$$1\% \quad \delta' = 0,3 \quad \bar{N} = 333\,472,8$$

n°	N	$N/\bar{N}$	$\log N/\bar{N}$	n°	N	$N/\bar{N}$	$\log N/\bar{N}$
1	193 800	0,5811	$\bar{1},76418$	36	326 700	0,9796	$\bar{1},99105$
2	198 700	0,5958	.77510	37	331 800	0,9949	.99778
3	210 500	0,6312	.80017	38	334 400	1,0027	0,00117
4	210 800	0,6321	.80079	39	335 100	1,0048	0,00207
5	217 000	0,6507	.81338	40	340 000	1,0195	0,00838
6	225 700	0,6768	.83046	41	349 000	1,0465	.01961
7	233 200	0,6993	.84466	42	349 900	1,0492	.02086
8	234 100	0,7020	.84634	43	363 200	1,0891	.03707
9	236 600	0,7095	.85095	44	364 300	1,0924	.03838
10	238 500	0,7152	.85443	45	364 700	1,0936	.03886
11	250 900	0,7523	.87639	46	366 500	1,0990	.04100
12	252 200	0,7562	.87864	47	370 800	1,1119	.04606
13	252 200	0,7562	.87864	48	372 100	1,1158	.04758
14	256 300	0,7685	.88564	49	372 800	1,1179	.04840
15	258 000	0,7736	.88852	50	381 500	1,1440	.05843
16	265 000	0,7946	.90015	51	387 200	1,1611	.06486
17	268 600	0,8054	.90601	52	389 600	1,1683	.06755
18	272 000	0,8156	.91148	53	395 800	1,1869	.07441
19	273 600	0,8204	.91403	54	396 500	1,1890	.07518
20	274 400	0,8228	.91529	55	414 100	1,2417	.09401

...../

n°	N	$N/\bar{N}$	$\log N/\bar{N}$	n°	N	$N/\bar{N}$	$\log N/\bar{N}$
21	279 500	0,8381	.92330	56	416 000	1,2495	.09673
22	280 400	0,8408	.92469	57	416 700	1,2495	.09673
23	281 000	0,8426	.92562	58	420 500	1,2609	.10068
24	281 800	0,8450	.92686	59	421 200	1,2630	.10140
25	283 500	0,8501	.92947	60	437 700	1,3125	.11809
26	286 100	0,8579	.93334	61	441 300	1,3233	.12165
27	286 200	0,8582	.93359	62	443 900	1,3311	.12421
28	290 900	0,8723	.94067	63	444 700	1,3335	.12499
29	292 200	0,8762	.94260	64	449 400	1,3476	.12956
30	297 500	0,8921	.95041	65	453 400	1,3596	.13341
31	303 500	0,9101	.95909	66	456 100	1,3677	.13599
32	315 100	0,9449	.97539	67	482 500	1,4468	.16041
33	315 500	0,9461	.97594	68	494 300	1,4822	.17090
34	324.000	0,9715	.98744	69	494 700	1,4834	.17125
35	326 700	0,9796	.99105	70	498 700	1,4954	.17475

On a trouvé ainsi $\log. \alpha = \bar{4}. 34\ 354 + 2,74390 = \bar{1},08744$
 dont la moyenne positive est : $\frac{0,91256}{70} = 0,01303$

Le logarithme népérien est alors égal à :

$$0,01303 \times 2,30259 = 0,03$$

La table des valeurs de α donne : $K = 16,83$

..../

$$2^\circ / \quad \gamma' = 0,5 \quad \bar{N} = 38.814$$

n°	N	$N/\bar{N}$	$\log N/\bar{N}$	n°	N	$N/\bar{N}$	$\log N/\bar{N}$
1	27 100	0,6982	1.84398	26	38 500	0,9919	99647
2	29 400	0,7574	87933	27	38 600	0,9944	99756
3	29 500	0,7600	88081	28	38 700	0,9970	99870
4	30.000	0,7729	88812	29	38 800	0,9996	99983
5	30 800	0,7935	89955	30	39 100	1,0073	0,00315
6	30 900	0,7961	90097	31	39 300	1,0125	00539
7	32 700	0,8424	92552	32	39 500	1,0176	00757
8	32 900	0,8476	92819	33	39 600	1,0202	00877
9	33 100	0,8527	93080	34	40 300	1,0382	01628
10	33 300	0,8579	93344	35	40 300	1,0382	01628
11	33 400	0,8605	93475	36	40 500	1,0434	01844
12	33 500	0,8630	93601	37	41 400	1,0666	02800
13	33 600	0,8656	93732	38	41 900	1,0795	03282
14	34 700	0,8940	95134	39	43 200	1,1130	04650
15	35 100	0,9043	95631	40	43 200	1,1130	04650
16	35 300	0,9094	95875	41	43 800	1,1284	05246
17	35 700	0,9197	96365	42	43 800	1,1284	05246
18	36 000	0,9275	96731	43	44 300	1,1413	05740
19	36 100	0,9300	96848	44	45 000	1,1593	06419
20	36 200	0,9326	96970	45	46 500	1,1980	07846
21	36 500	0,9403	97327	46	50 100	1,2907	11082
22	37 000	0,9532	97918	47	50 500	1,3010	11428
23	37 100	0,9558	98037	48	52 300	1,3474	12949
24	37 700	0,9712	98731	49	56 300	1,4505	15851
25	38 000	0,9790	99 078	50	59 600	1,5355	18625

On trouve ainsi $\log. Q_L = 2,45780 + 1,23402 = 1,69182$

dont la moyenne positive est $\frac{0,30818}{50} = 0,00616$

.... /

le logarithme népérien est alors égal à :

$$0,00616 \times 2,30259 = 0,01419$$

La table de valeur de Q_L donne :

$$\underline{K = 35,88}$$

3°/

 $\gamma = 0,7$ $\bar{N} = 8.410$

n°	N	$N/\bar{N}$	$\log N/\bar{N}$	n°	N	$N/\bar{N}$	$\log N/\bar{N}$
1	5 800	0,6896	1.83860	26	8 400	0,9988	.99948
2	6 400	0,7609	88133	27	8 400	0,9988	99948
3	6 400	0,7609	88133	28	8 500	1,0107	0,00462
4	6 700	0,7966	90124	29	8 500	1,0107	00462
5	6 800	0,8085	90768	30	8 500	1,0107	00462
6	6 900	0,8204	91403	31	8 500	1,0107	00462
7	6 900	0,8204	91403	32	8 600	1,0225	00966
8	7 200	0,8561	93252	33	8 700	1,0344	01468
9	7 200	0,8561	93252	34	8 800	1,0463	01965
10	7 700	0,9155	96166	35	8 800	1,0463	01965
11	7 700	0,9155	96166	36	8 800	1,0463	01965
12	7 800	0,9274	96727	37	8 800	1,0463	01965
13	7 800	0,9274	96727	38	8 900	1,0582	02457
14	7 800	0,9274	96727	39	9 200	1,0939	03898
15	7 900	0,9393	97280	40	9 400	1,1177	04832
16	7 900	0,9393	97280	41	9 400	1,1177	04832
17	7 900	0,9393	97280	42	9 400	1,1177	04832
18	8 100	0,9631	98367	43	9 500	1,1296	05292
19	8 100	0,9631	98367	44	9 800	1,1652	06640
20	8 200	0,9750	98900	45	9 800	1,1652	06640
21	8 200	0,9750	98900	46	9 800	1,1652	06640
22	8 200	0,9750	98900	47	10 100	1,2009	07950
23	8 300	0,9869	99427	48	10 500	1,2485	09638
24	8 300	0,9869	99427	49	11 400	1,3555	13210
25	8 400	0,9988	99948	50	11 400	1,3555	13210

On trouve ainsi $\log. \alpha = 2,76813 + 1,02213 = 1,79026$

dont la moyenne positive est : $\frac{0,20974}{50} = 0,00419$

Le logarithme népérien est alors égal à :

$$0,00419 \times 2,30259 = 0,009658$$

La table des valeurs de α donne : K = 52

.../

On trouve ainsi $\log. \alpha = 2,13561 + 1,50449 = 3,64010$
 dont la moyenne positive est $\frac{0,35990}{56} = 0,0064267$

Le logarithme népérien est alors égal à :

$$0,0064267 \times 2,30259 = 0,01479$$

La table de valeur de α donne : $K = 35,88$

A N N E X E I I I

CALCUL DE α ET VERIFICATION DE LA FORMULE :

$$y = \alpha f = C \frac{e^{\frac{B}{\gamma}}}{\gamma - \gamma_0}$$

On calcule B en utilisant deux valeurs de y et γ . La formule s'écrit :

$$B = \frac{\text{Log } y_1/y_2 - \text{Log } \frac{\gamma_2 - \gamma_0}{\gamma_1 - \gamma_0}}{1/\gamma_1 - 1/\gamma_2}$$

On calcule ensuite

$$\text{Log } C = \text{Log } y + L(\gamma - \gamma_0) - \frac{B}{\gamma}$$

la valeur de $\text{Log } C$ trouvée doit être à peu près constante pour les quatre couples de données.

Le tableau de calcul s'établit comme suit (Voir Tableau A).

On choisira pour C les valeurs suivantes :

SUD-AVIATION	$\text{Log } C = 3,6$
W 59	$\text{Log } C = 5,6$
W 68	$\text{Log } C = 3,8$

Si on fait le calcul des valeurs de y pour C et B constants, on doit trouver des valeurs se situant dans l'intervalle y_- , y_+ figurant sur le tableau A.

Le calcul est effectué ci-dessous pour les trois série de résultats (Voir Tableaux B, C, D).

On voit que les valeurs trouvées sont satisfaisantes.

.... /

TABLEAU A

Désignation	δ	$\frac{1}{\delta}$	$\delta - \delta_0$	$L(\delta - \delta_0)$	N_-	N_+	$L(N_-)$	$L(N_+)$	K_-	K_+	$y_- = \frac{N_-}{K_-}$	$y_+ = \frac{N_+}{K_+}$	$L(y_-)$	$L(y_+)$	B_-	B_+	$\frac{B_-}{\delta}$	$\frac{B_+}{\delta}$	$L(C_-)$	$L(C_+)$
SUD-AVIATION = 0,067	0,161	6,2111	0,094	-2,36446	303.326	363.620	12,62259	12,80387	15,32	18,34	1.653,9	23.735	9,71349	10,07473	0,67200	0,65139	4,17386	4,04584	3,175	3,664
	0,310	3,2258	0,243	-1,41468	35.855	41.773	10,48726	10,64001	33,27	38,49	931,54	1.255,5	6,83685	7,13528						
	0,512	1,9531	0,445	-0,80968	7.896	8.924	8,97413	9,09652	48,15	55,15	143,7	185,3	4,96403	5,22215						
	0,775	1,2903	0,708	-0,34532	3.085	4.269	8,03433	8,35916	33,41	38,35	80,44	127,7	4,38753	4,85022						
W 59 = 0,076	0,192	5,2083	0,268	-1,31678	608.400	720.440	13,31861	13,48762	12	14,2	42.845	60.036	10,66536	11,00272	0,74049	0,74149	3,85669	3,86190	5,491	5,824
	0,308	3,2467	0,384	-0,95711	125.724	146.760	11,74187	11,89658	15	17,97	6,996,3	9.784,0	8,85313	9,18853						
	0,462	2,1645	0,538	-0,61988	29.977	35.255	10,30821	10,47038	13,78	16,86	1.778	2.558,4	7,48325	7,84713						
	0,616	1,6233	0,692	-0,36816	9.334	10.924	9,14144	9,29873	12,66	15,44	604,5	862,8	6,40446	6,76029						
W 68 = 0,355	0,368	2,7174	0,013	-4,34282	909.160	3869160	13,72028	15,16856	0,36	0,94	967,19	10747666	13,78217	16,19022	1,66893	2,57001	4,53515	6,98374	4,904	4,863
	0,442	2,2624	0,087	-2,44185	118.023	223.003	11,67864	12,31494	2,60	4,32	27.320	85.770	10,21539	11,35946						
	0,542	1,8450	0,187	-1,67665	39.564	59.772	10,58569	10,99829	4,94	7,24	5.464,6	12.099	8,60604	9,40092						
	0,657	1,5220	0,302	-1,19732	22.897	29.003	10,03878	10,27517	7,87	10,01	2.287,4	3.685,2	7,73518	8,21209						

SUD-AVIATION

TABLEAU B

$$\begin{cases} L(C) = 3,2 \\ B = 0,67 \end{cases}$$

W 68

TABLEAU D

$$\begin{cases} L(C) = 3,8 \\ B = 2 \end{cases}$$

δ	$a = L(C) - L(\delta - \delta_0)$	$L(y_-)$	$L(y_+)$	$\frac{B}{\delta}$	$a + \frac{B}{\delta}$	δ	$a = L(C) - L(\delta - \delta_0)$	$L(y_-)$	$L(y_+)$	$\frac{B}{\delta}$	$a + \frac{B}{\delta}$
0,161	5,56 446	9,71 349	10,07 473	4,16 149	72 595	0,368	8,14 282	13,78 217	16,19 022	5,64 945	13,79 227
0,310	4,61 468	6,83 685	7,13 528	2,16 129	77 597	0,442	6,24 185	10,21 539	11,35 946	4,70 361	10,94 546
0,512	4,00 968	4,96 403	5,22 219	1,30 859	5,31 827	0,542	5,47 665	8,60 604	9,40 092	3,83 579	9,31 244
0,775	3,54 532	4,38 751	4,84 969	0,86 451	4,40 983	0,657	4,99 732	7,73 518	8,21 209	3,21 329	8,21 061

W 59

TABLEAU C

$$\begin{cases} L(C) = 5,2 \\ B = 0,8 \end{cases}$$

δ	$a = L(C) - L(\delta - \delta_0)$	$L(y_-)$	$L(y_+)$	$\frac{B}{\delta}$	$a + \frac{B}{\delta}$
0,192	6,51 678	10,66 536	11,02 272	4,16 666	10, 8 344
0,308	6,15 711	8,85 313	9,18 853	2,59 740	8,75 451
0,462	6,81 988	7,48 325	7,84 713	1,73 160	7,55 148
0,616	5,56 816	6,40 446	6,76 029	1,29 870	6,86 686

ANNEXE IV : CALCUL DE LA COURBE DE WOHLER POUR LES RESULTATS SUD AVIATION

Formule
$$N = \Pi \cdot \left(\frac{1-\gamma}{\gamma-\gamma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{B}{\gamma}} \cdot u$$

Soit
$$L(N) = L(\Pi) + Q + \frac{B}{\gamma} + L(u) \quad \text{ou} \quad Q = \frac{1}{2} [L(1-\gamma) - L(\gamma-\gamma_0)]$$

Valeurs numériques des constantes $\Pi = CM^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad M = 229 ; L(C) = 3,2$
 soit $L\Pi = 3,2 + 2,71687 = 5,91687$
 $B = 0,67$
 $\gamma_0 = 0,067$

γ	$1-\gamma$	$\gamma-\gamma_0$	Q	k	p	u		L(u)		$\frac{B}{\gamma}$	L(N)	
						prob 0,001	prob 0,9998	prob 0,001	prob 0,9998		prob 0,001	prob 0,9998
0.1	0.9	0.033	1.65 293	6.8	5.8	0.54 03	7.67 31	0.61 564	2.03 772	6.7	13.65 416	16.30 752
0.2	0.8	0.133	0.89 713	24.4	23.4	2.41 10	9.27 74	0.88 005	2.22 757	3.35	11.04 405	12.39 157
0.3	0.7	0.233	0.55 002	37.4	36.4	3.48 03	10.31 18	1.24 710	2.33 323	2.23 333	9.94 732	11.13 550
0.4	0.6	0.333	0.29 438	45.8	44.8	4.09 06	10.88 71	1.40 867	2.38 757	1.675	9.29 492	10.27.382
0.5	0.5	0.433	0.07 193	49.6	48.6	4.34 63	11.14 10	1.46 932	2.41 062	1.34	8.79 812	9.73 942
0.6	0.4	0.533	-0.14 352	48.8	47.8	4.21 08	11.08 70	1.43 764	2.40 577	1.11 666	8.32 765	9.29 578
0.7	0.3	0.633	-0.37 334	43.4	42.4	3.92 00	10.72 41	1.36 610	2.37 247	0.95 714	7.85.677	8.87 314
0.8	0.2	0.733	-0.64 940	33.6	32.6	3.18 68	10.01 42	1.15 900	2.30 399	0.83 750	7.26 397	8.40 896
0.9	0.1	0.833	-1.05 992	19	18	1.90 42	8.80 25	0.64 405	2.17 502	0.74 444	6.24 544	7.77 641

VALEURS STATISTIQUES EXTREMES

γ	Mini.	Maxi.	L(Mini)	L(Maxi)
0.161	193.800	498.700	12.17 460	13.11 979
0.310	27.100	59.600	10.20 731	10.99 544
0.512	5.800	11.400	8.66 563	9.34 137
0.775	2.300	4.700	7.74 068	8.45 534

ANNEXE V

CALCUL DE LA FONCTION DE REPARTITION DE LA DUREE DE VIE

D'APRES LA LOI DE MINER

On a vu que le calcul de la fonction de répartition de la durée de vie, en supposant vrai l'effet cumulatif que comporte la loi de MINER, débutait par le calcul de la fonction caractéristique :

$$\bar{\Phi}(t) = \frac{1}{\beta^K \Gamma(K)} \int_0^{\infty} e^{it \frac{n}{N} - \frac{N}{\beta}} N^{K-1} dN \quad (1)$$

On a proposé pour cela un développement en série suivant les moments de la fonction de répartition initiale. Ce procédé, malheureusement se heurte à des difficultés de calcul numérique par suite des capacités limitées des calculatrices actuelles IBM 650 par exemple.

L'introduction des fonctions Γ et les oscillations très grandes des moments font que l'on dépasse rapidement pour des valeurs de t peu élevées - de l'ordre de 5 - les valeurs 10 ± 50 , limite extrême de cette capacité.

Le calcul suivant a permis de trouver une expression de $\hat{\Phi}(t)$ n'offrant pas cet inconvénient.

Effectuons tout d'abord sur (1) le changement de variables

$$u = \frac{N}{\beta} \quad (2)$$

il vient :

$$\bar{\Phi}(t) = \Gamma^{-1}(K) \int_0^{\infty} e^{i \frac{n}{\beta} t \cdot \frac{1}{u} - u} u^{K-1} du \quad (3)$$

Pour étudier cette intégrale on va la considérer comme une fonction de t et du paramètre K . Posons :

$$K = y \quad (4)$$

$$\frac{n}{\beta} t = x$$

....

(3) s'écrit alors :

$$f(x, y) = \Gamma^{-1}(y) \int_0^{\infty} e^{i \frac{x}{u} - u} u^{y-1} du \quad (5)$$

$\Phi(t)$ étant une fonction caractéristique, on doit avoir

$$f(0, y) = 1 \quad f(+\infty, y) = 0$$

Posons :

$$z = 2(ix)^{1/2} = (1+i)(2x)^{1/2}$$

soit :

$$ix = \frac{z^2}{4}$$

et

$$f(x, y) = \Gamma^{-1}(y) \int_0^{\infty} e^{\frac{z^2}{4u} - u} u^{y-1} du \quad (6)$$

Pour le calcul numérique de cette fonction on va établir deux relations une relation de récurrence et une équation différentielle dont elle est solution.

Remarquons tout d'abord que :

$$\frac{d}{du} \left[e^{\frac{z^2}{4u} - u} \right] = e^{\frac{z^2}{4u} - u} \left[-\frac{z^2}{4} \cdot \frac{1}{u^2} - 1 \right] \quad \text{et par conséquent :}$$

$$\frac{z^2}{4u^2} e^{\frac{z^2}{4u} - u} du = -d \left[e^{\frac{z^2}{4u} - u} \right] - e^{\frac{z^2}{4u} - u} du \quad (7)$$

Multiplions $f(x, y)$ par $\frac{z^2}{4y(y+1)}$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{z^2 f(x, y)}{4y(y+1)} &= \frac{z^2 \Gamma^{-1}(y)}{4y(y+1)} \int_0^{\infty} e^{\frac{z^2}{4u} - u} u^{y-1} du = \frac{\Gamma^{-1}(y)}{y(y+1)} \int_0^{\infty} \frac{z^2 e^{\frac{z^2}{4u} - u}}{4u^2} u^{y+1} du \\ &= -\Gamma^{-1}(y+2) \int_0^{\infty} u^{y+1} \left[d \left[e^{\frac{z^2}{4u} - u} \right] + e^{\frac{z^2}{4u} - u} du \right] \\ &= -\Gamma^{-1}(y+2) \int_0^{\infty} u^{y+1} d \left[e^{\frac{z^2}{4u} - u} \right] - f(z, y+2) \end{aligned}$$

On a en outre, en intégrant par parties :

$$\int_0^{\infty} u^{y+1} d \left[e^{\frac{z^2}{4u} - u} \right] = \left[u^{y+1} e^{\frac{z^2}{4u} - u} \right]_0^{\infty} - (y+1) \int_0^{\infty} e^{\frac{z^2}{4u} - u} u^y du$$

.../

Le terme intégré est nul. De plus comme $\Gamma(y+2) = (y+1)!$, le second membre est égal à : $-f(z, y+1)$. On a donc la relation de récurrence

$$f(z, y+2) - f(z, y+1) + \frac{z^2}{4y(y+1)} f(z, y) = 0 \quad (8)$$

Différencions $f(z, y+2)$ par rapport à z .. on a :

$$\Gamma(y+2) f'(z, y+2) = \int_0^\infty e^{\frac{z^2}{4u} - u} u^{y+1} du$$

$$\text{d'où : } \Gamma(y+2) f'_z(z, y+2) = \int_0^\infty \frac{z}{2u} e^{\frac{z^2}{4u} - u} u^{y+1} du = \frac{z}{2} f(z, y+1) \Gamma(y+1)$$

Ce qui s'écrit :

$$(y+1) f'_z(z, y+2) = \frac{1}{2} z f(z, y+1) \quad (9)$$

En différentiant une nouvelle fois :

$$(y+1) f''(z, y+2) = \frac{1}{2} f(z, y+1) + \frac{1}{2} z f'_z(z, y+1) \quad (10)$$

Soit en remplaçant par (9)

$$(y+1) f''(z, y+2) = \frac{y+1}{2} f'_z(z, y+2) + \frac{1}{2} z f'_z(z, y+1)$$

Evaluons : $f'_z(z, y+1)$ on a :

$$\Gamma(y+1) f'_z(z, y+1) = \int_0^\infty e^{\frac{z^2}{4u} - u} u^y du$$

d'où :

$$\Gamma(y+1) f'_z(z, y+1) = \frac{z}{2} \int_0^\infty e^{\frac{z^2}{4u} - u} u^y du = \frac{z}{2} f(z, y) \Gamma(y)$$

donc :

$$f'_z(z, y+1) = \frac{z}{2y} f(z, y) \quad (11)$$

En reportant dans (10) on a :

$$(y+1) f''(z, y+2) = \frac{y+1}{2} f'_z(z, y+2) + \frac{z^2}{4y} f(z, y)$$

soit :

$$f''(z, y+2) - \frac{1}{2} f'_z(z, y+2) = \frac{z^2}{4y(y+1)} f(z, y) \quad (12)$$

La relation (8) de récurrence permet d'écrire :

$$f''(z, y+2) - z^{-1} f'(z, y+2) + f(z, y+2) - f(z, y+1) = 0$$

En remplaçant $f(z, y+1)$ par sa valeur prise dans (9), il vient :

$$f''(z, y+2) - \frac{2y+3}{z} f'(z, y+2) + f(z, y+2) = 0$$

Enfin, en changeant y en $y-2$ on obtient l'équation différentielle

$$f''(z, y) - \frac{2y-1}{z} f'(z, y) + f(z, y) = 0 \quad (13)$$

Il est facile de voir que cette équation est une équation de Bessel.

On cherchera des solutions pour les valeurs entières de y puisque K nombre de fissures élémentaires, est en principe un nombre entier.

Elle a deux solutions indépendantes $z^y H_{-y}^{(1)}$; $z^y H_{-y}^{(2)}$ où H désigne les fonctions de HANKEL

$$f(z, y) = z^y [A H_{-y}^{(1)}(z) + B H_{-y}^{(2)}(z)] \quad (14)$$

On a vu que $f(z, y)$ devait être plus petit que 1 en module. Or $|H_{-y}^{(2)}(z)|$ tend vers l'infini quand $|z|$ augmente indéfiniment avec $\text{Im}(z) > 0$

Comme on a choisi la racine positive $z = (1+i)(2x)^{1/2}$, on doit avoir $B=0$. La constante A est déterminée par $f(0, y)=1$, on en déduit :

$$A = \left\{ \lim_{z \rightarrow 0} z^y H_{-y}^{(1)}(z) \right\}^{-1} = \left\{ 2^y \Gamma(y) e^{i(y-\frac{1}{2})\pi} \right\}^{-1} \pi \quad (15)$$

On aurait besoin de pouvoir décomposer $H_{-y}^{(1)}(z)$ en parties réelles et imaginaires, mais ceci n'a jamais été réalisé. Pour tourner cette difficulté, on calculera les valeurs de $f(x, y)$ aux points $y = n + \frac{1}{2}$, n étant entier, et on en déduira la valeur pour $y = n$ par interpolation. On obtiendra la valeur de $f(x, y)$ à partir de deux valeurs de $f(x, n + \frac{1}{2})$ qui s'expriment exactement.

Pour les valeurs de n , $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ on a les formules connues :

$$\begin{aligned} z^{1/2} H_{-1/2}^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{iz} \\ z^{3/2} H_{3/2}^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{iz} (iz - 1) \end{aligned} \quad (16)$$

En utilisant la formule (15) on en tire :

$$\begin{aligned} f(z, 1/2) &= e^{iz} \\ f(z, 3/2) &= (1 - iz) e^{iz} \end{aligned} \quad (17)$$

soit : $\sqrt{2x} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} t = m \Rightarrow z = (1+i)m$

d'où :

$$f(z, 1/2) = e^{-im} (\cos m + i \sin m)$$

et

$$f(z, 3/2) = e^{-im} \left\{ \begin{aligned} &[(m+1)\cos m + m \sin m] \\ &+ i [(m+1)\sin m - m \cos m] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Ayant les deux valeurs pour chaque valeur de t on obtiendra la valeur correspondant à la vraie valeur de K en utilisant la formule de récurrence (8) dont on peut séparer les parties réelles et imaginaires en écrivant :

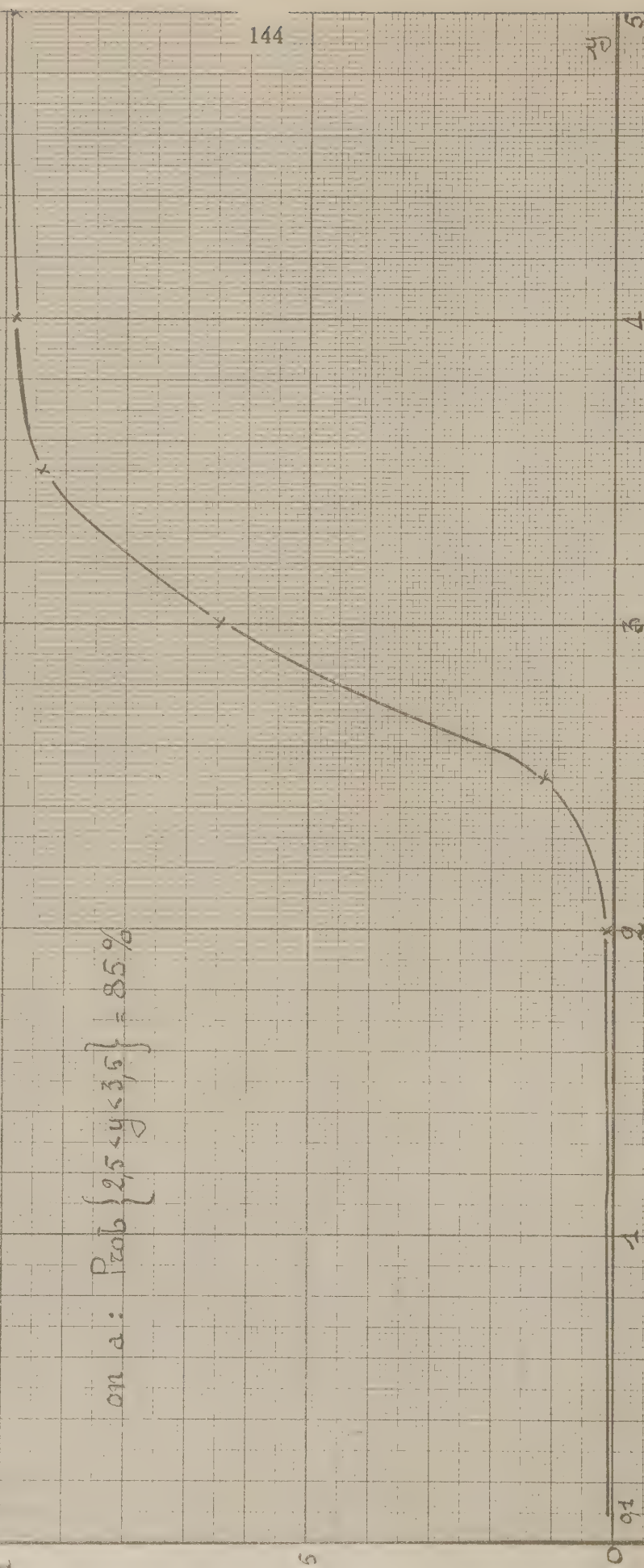
$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(z, 5/2+K) &= \operatorname{Re} f(z, 3/2+K) + 2m^2 \operatorname{Im} \frac{f(z, 1/2+K)}{(2K+1)(2K+3)} \\ \operatorname{Im} f(z, 5/2+K) &= \operatorname{Im} f(z, 3/2+K) - 2m^2 \operatorname{Re} \frac{f(z, 1/2+K)}{(2K+1)(2K+3)} \end{aligned} \quad (19)$$

Ce calcul effectué avec les valeurs données Ch. VII page 68 a permis de tracer la courbe ci-jointe de la fonction de distribution après inversion de la fonction caractéristique produit de $\Phi_1(t) \cdot \Phi_2(t)$

Courbe de répartition

$$F(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\sin t y \Phi_2 - \cos t y \Phi_2}{t} dt$$

on a: $\text{Prob}\{2,5 < y < 3,5\} = 85\%$



NOTE SUR L'UTILISATION DE LA FONCTION DE REPARTITION
DES DUREES DE VIE POUR L'ETUDE DES PERIODICITES

La sécurité de fonctionnement d'une structure - la sécurité de vol dans le cas d'un avion -, ce que les anglo-saxons, désignent par le mot "Reliability", est habituellement donnée sous forme d'une probabilité qu'au bout d'un temps donné, une structure mise en service au temps t_0 , soit encore en état d'accomplir sa tâche.

Ce problème peut également être posé sous une forme un peu différente : quelle est la durée de vie moyenne d'une structure qui sera considérée hors service si la sécurité de fonctionnement tombe en dessous d'un niveau prédéterminé ? D'autres questions se posent à propos de la vie des matériels. Supposons par exemple que lorsqu'une défectuosité apparaît, la structure ou l'élément de structure soit immédiatement réparé ou remplacé, supposons également que l'on connaisse la loi de répartition des durées de réparation, on peut se poser les questions suivantes : quel est en moyenne le nombre de défectuosités à attendre dans un temps donné ? Quelle est la durée moyenne d'immobilisation d'une structure pour réparation ? A un instant donné quelle probabilité une structure donnée a-t-elle d'être en cours de réparation ?

On peut trouver dans la littérature des réponses à ces questions. Le but de cette annexe est de les regrouper. La base des solutions proposées est la fonction de répartition des durées de vie, dont le présent essai a fourni le moyen de la déterminer.

1. Temps moyen de survie

La fonction de répartition $H(t)$ trouvée représente la probabilité pour que la structure considérée soit défectueuse au bout d'un temps $T < t$. La probabilité que cette structure mise en service au temps $t = 0$, n'ait aucune défectuosité au temps $T < t$ est par conséquent :

$$\bar{R}(t) = 1 - H(t) \quad (1)$$

Dans tous les cas la probabilité que l'élément ou la structure mise en service au temps $t=0$ tombe en panne au temps T compris entre t et $t+dt$ sera :

$$p(t) = \frac{dH(t)}{dt} = - \frac{dR(t)}{dt} \quad (2)$$

Le temps moyen de survie s'obtiendra en écrivant :

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} t p(t) dt = - \int_0^{\infty} t dR(t) \quad (3)$$

d'où, en intégrant par parties :

$$\bar{T} = - \left[t R(t) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (4)$$

Dans le cas où la défectuosité correspond a priori à une sécurité en dessous de la valeur R_0 telle que $R_0 = R(t_0)$ le temps moyen de service sera donné par :

$$\bar{T}_0 = \int_0^{t_0} R(t) dt \quad (5)$$

2. Estimation du nombre de réparations

Soit $p(t) dt$ la probabilité qu'une durée de réparation se termine entre t et $t+dt$, en supposant qu'elle ait commencé au temps $t=0$, la durée de vie avant réparation étant distribuée suivant $p(t)$, la fonction de répartition du temps total : somme de la durée de vie et de la durée de réparation aura pour expression :

$$\Psi(t) = \int_0^t p(\beta) p(t-\beta) d\beta \quad (6)$$

Soit $T_n(t)$ la probabilité qu'il y ait eu au moins n pannes suivies de réparation dans l'intervalle de temps $[0, t]$. On écrira que la probabilité qu'il y en ait au moins n dans cette durée est égale à la probabilité qu'il y en ait $n-1$ dans le temps t multiplié par la probabilité qu'il y en ait 1 dans le temps $t-t$ restant, d'où :

$$T_n(t) = \int_0^t T_{n-1}(\tau) \Psi(t-\tau) d\tau \quad (7)$$

Cette équation de récurrence demande que soit connue l'expression de $T_1(t)$. Soit $\lambda(t)$ la probabilité qu'une durée de remplacement soit plus petite ou égale à t . D'après la définition de

$p(t)$ on a :

$$\lambda(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau \quad (8)$$

On a donc :

$$T_1(t) = \int_0^t p(\beta) \lambda(t-\beta) d\beta \quad (9)$$

On voit, en comparant 9 et 6 que l'on peut écrire :

$$\Psi(t) = \frac{dT_1(t)}{dt} \quad (10)$$

On peut donc exprimer T_n complètement en fonction de $R(t)$ et $p(t)$ qui sont des données. Le calcul peut être extrêmement simplifié en utilisant la transformation de Laplace.

Soit $g(t)$ l'originale et $G(s)$ la transformée, on écrira :

$$\text{avec : } G(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$$

Soit alors :

$$\begin{cases} T_n(t) = \pi_n(s) \\ \Psi(t) = \zeta(s) \end{cases} \quad (11)$$

L'équation 7, d'après le théorème sur la transformée d'une convolution s'écrit :

$$\pi_n(s) = \pi_{n-1}(s) \cdot \zeta(s)$$

En itérant cette relation, on obtient :

$$\pi_n(s) = \frac{[\zeta(s)]^n}{s} \quad (12)$$

Soit également :

$$\begin{cases} p(t) = q(s) \\ p(t) = r(s) \end{cases} \quad (13)$$

On a :

$$\zeta(s) = r(s) q(s)$$

Lorsque $\pi_n(s)$ est connu la formule d'inversion fournit $T_n(t)$

on a :

$$T_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \pi_n(s) ds \quad (14)$$

..../

Connaissant $F_n'(t)$, on peut facilement trouver l'espérance mathématique du nombre de pannes et réparations pendant la durée $[0, t]$. Soit $F_{[n]}'(t)$ la probabilité qu'il y ait eu exactement n pannes et réparations dans le temps t , par définition l'espérance mathématique $E(t)$ est :

$$E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n F_{[n]}'(t) \quad (15)$$

Mais on a également $F_{[n]}'(t) = F_n'(t) - F_{[n+1]}'(t) \quad (16)$

d'où l'on déduit :

$$E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n'(t) \quad (17)$$

On peut également obtenir une équation intégrale pour $E(t)$ en sommant les deux membres de 7. On a :

$$E(t) = F_1'(t) + \int_0^t E(\tau) \psi(t-\tau) d\tau$$

$E(t)$ étant une fonction du temps, posons :

$$e(t) = \frac{dE(t)}{dt} = \psi(t) + \int_0^t e(\tau) \psi(t-\tau) d\tau \quad (18)$$

Si l'on pose $e(t) = \mathcal{E}(s)$ on trouve à partir de 17 :

$$\mathcal{E}(s) = \frac{\zeta(s)}{1 - \zeta(s)}$$

La formule d'inversion fournit alors la valeur de $e(t)$. Bien qu'il soit souvent difficile d'obtenir une expression analytique de $e(t)$, on peut assez facilement obtenir une information sur le comportement asymptotique de $E(t)$ pour t tendant vers l'infini. Cette information présente un certain intérêt. Elle permet de dire en effet quel est le pourcentage de temps passé en moyenne par une structure en réparation ou remplacement au bout d'un temps assez long. Soit U ce pourcentage :

$$U = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(t)}{t} \cdot \bar{t}_r$$

où $\bar{t}_r = \int_0^{\infty} t p(t) dt$ temps moyen en réparation

On peut montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(t)}{t} = \frac{1}{\bar{t}_\psi}$

où : $\bar{t}_\psi = \int_0^{\infty} t \psi(t) dt$

Si l'on pose $\bar{t}_\varphi = \int_0^{\infty} t p(t) dt$ temps moyen de service

on a : $\bar{t}_\psi = \bar{t}_\varphi + \bar{t}_r$

et finalement $U = \frac{\bar{t}_r}{\bar{t}_r + \bar{t}_\varphi} \quad (19)$

3. Probabilité de l'instant de remplacement

On va tout d'abord établir une expression approchée de la probabilité qu'au temps t , une structure donnée ait été remplacée ou réparée de telle sorte que le temps passé en immobilisation ait eu la valeur y .

On suppose qu'au temps t la structure est en service. La validité de l'approximation tient au fait que le temps passé en service est beaucoup plus long que celui passé en réparation ou remplacement. On peut, dans ce cas, écrire que la probabilité cherchée $P(y, t)$ a pour expression :

$$P(y, t) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Prob} \left\{ n \text{ remplacements dans } (0, t) \right\} \times \text{Prob} \left\{ \begin{array}{c} \text{somme des } n \text{ temps} \\ = y \end{array} \right\}$$

Soit :

$$P(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{[n]}^{\cdot}(t) p_n(y) \quad (20)$$

La fonction $F_{[n]}^{\cdot}(t)$ se calcule à l'aide des relations 14 et 16. Il reste à trouver $p_n(y)$. y est la somme de n variables aléatoires, chacune d'elles étant distribuée suivant $p(t) dt$. Il suffit d'utiliser la fonction caractéristique de $p(t)$ ou la transformation de Laplace de la $n^{\text{ème}}$ convolution pour obtenir $P(y, t)$.

Le problème suivant consiste à trouver la probabilité que le $n^{\text{ème}}$ remplacement se termine dans l'intervalle de temps $[t, t+dt]$. Soit $\omega_n(t) dt$ cette probabilité. On peut l'évaluer en écrivant que :

$$\omega_n(t) dt = \text{Prob} \left\{ (n-1)^{\text{ème}} \text{ remplacement se termine au temps } \tau_{n-1} \right\} \\ \times \text{Prob} \left\{ \text{que le système s'arrête au temps } \tau \right\} \\ \times \text{Prob} \left\{ \text{que la } n^{\text{ème}} \text{ immobilisation dure plus que } (t - \tau) \right\}$$

soit :

$$\omega_n(t) dt = dt \int_0^t \omega_{n-1}(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1} \int_{\tau_{n-1}}^t p(t - \tau_{n-1}) d\tau \int_{t-\tau}^{\infty} p(\beta) d\beta \quad (21)$$

..../

Avec un changement de variable convenable cette expression s'écrit :

$$\omega_n(t) = \int_0^t \omega_{n-1}(\tau) \psi(t-\tau) d\tau \quad (22)$$

où $\psi(t)$ est défini par (6). On voit que $\omega_n(t)$ satisfait la même équation que $\frac{dF_n(t)}{dt}$, on trouve :

$$\omega_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \frac{[\zeta(s)]^n}{s} ds \quad (23)$$

et l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \omega_n(t) dt \quad (24)$$

donne la probabilité que le $n^{\text{ème}}$ rapprochement se termine dans l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

On peut calculer d'une manière analogue la probabilité η_n que la structure subisse son $n^{\text{ème}}$ remplacement au temps t en écrivant que :

$$\eta_n(t) = \text{Prob.} \left\{ \begin{array}{l} \text{que le } (n-1)^{\text{ème}} \text{ remplacement se termine au temps } t_{n-1} \\ \times \text{ Prob.} \left\{ \begin{array}{l} \text{que la structure tombe en panne au temps } \tau \\ \times \text{ Prob.} \left\{ \begin{array}{l} \text{que le dernier remplacement dure plus que } t-\tau \end{array} \right\} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$\text{soit : } \eta_n(t) = \int_0^t \omega_{n-1}(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1} \int_{\tau_{n-1}}^t p(t-\tau_{n-1}) d\tau \int_{t-\tau}^{\infty} p(\beta) d\beta \quad (25)$$

$$= \int_0^t \omega_{n-1}(\tau) [1 - R(t-\tau) - F_1'(t-\tau)] d\tau \quad (26)$$

en utilisant (2) (8) et (9).

La probabilité η_1 est simplement :

$$\eta_1(t) = \int_0^t p(\beta) d\beta \int_{t-\beta}^{\infty} p(\tau) d\tau = 1 - R(t) - F_1'(t) \quad (27)$$

.... /

La probabilité que la structure subisse un remplacement quelconque au temps t s'obtiendra par :

$$\eta^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \quad (28)$$

La transformation de LAPLACE permet d'obtenir des relations intéressantes : Soit $\omega^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t)$ et $\omega^*(t) \equiv \Omega(s)$

soit également : $1 - R(t) - F_1'(t) \equiv \sigma(s)$. En intervertissant sommation et intégration dans (26), on peut écrire :

$$\eta^*(t) = 1 - R(t) - F_1'(t) + \int_0^t \omega^*(\tau) [1 - R(t-\tau) - F_1'(t-\tau)] d\tau$$

En sommant sur n dans (22), on obtient :

$$\omega^*(t) = \psi(t) + \int_0^t \omega^*(t-\tau) \psi(\tau) d\tau \quad (29)$$

d'où on déduit :

$$\Omega(s) = \frac{\zeta(s)}{1 - \zeta(s)} \quad (30)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\eta^*(t) = \frac{\sigma(s)}{1 - \zeta(s)} \quad (31)$$

Comme on a vu que $F_1'(t)$ et $\psi(t)$ ne dépendent que des quantités $R(t)$ et $\rho(t)$, leur connaissance permet d'obtenir $\eta^*(t)$

ANNEXE VII

TEST DE RECEPTION EN FATIGUE

I. L'augmentation de l'intérêt pour les phénomènes de fatigue, a fait ajouter aux conditions de réception des matériaux celle de la tenue en fatigue. On demandera, par exemple à des boulons de titane d'avoir une durée de vie plus grande que 30.000 aitermanes.

C'est ainsi que des essais de fatigue effectués à SUD-AVIATION sur vis titane TA 4 M de Φ : 5 mm ont fourni un échantillon de 59 éprouvettes.

Le simple aspect de l'histogramme a démontré immédiatement qu'il n'y avait aucun espoir de pouvoir représenter les résultats par une loi normale. Par contre pour un $K = 0,55$ le test du χ^2 a montré que l'on pouvait ajuster une loi de Pearson type III.

Les essais de réception en fatigue étant destructifs, on avait intérêt à utiliser un test progressif diminuant ainsi le nombre d'éprouvettes à casser. Les tests figurant dans les ouvrages traitant de ce sujet sont tous élaborés sur la loi de Laplace Gauss, il était donc nécessaire de reprendre le calcul des paramètres du test et de voir si sa structure était trop profondément modifiée par la loi Gamma pour être facilement utilisée. Ce sont les résultats de ce calcul qui figurent ci-après.

II. Etant donné deux valeurs d'indices 1 et 2 du paramètre choisi pour être contrôlé, la base du test de Wald est constituée par le comportement du rapport p_{2m}/p_{1m} , p_{2m} et p_{1m} étant les probabilités de l'échantillon de m éléments pour les valeurs 1 et 2 du paramètre.

Dans le cas présent la probabilité de rupture d'une éprouvette au bout d'un nombre de cycles compris entre x et $x + dx$ est donnée par la formule :

$$p(x) dx = \frac{1}{\Gamma(K)} e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{K-1} dx \quad (1)$$

Les paramètres K et α sont liés à la moyenne μ et à l'écart type σ par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\text{moyenne } \mu &= \alpha K \\ \text{variance } \sigma^2 &= \alpha^2 K\end{aligned}$$

On en tire les valeurs de α et K en fonction de μ et σ

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sigma^2}{\mu} \\ K &= \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\end{aligned}\quad (2)$$

Du point de vue structure du test séquentiel, ce sont les μ et σ qui devront être utilisés avec la formule (1).

On va supposer par exemple que le σ de la population étant connu on veut tester que le moyenne μ de l'échantillon se trouve située entre μ_1 et μ_2 .

Soit $x_1, x_2, \dots, x_m$ les observations successives de X . La densité de probabilité de l'échantillon sera donnée par le produit

$$\begin{aligned}p(x_1)p(x_2)\dots p(x_m) \text{ On a donc : } & \left(\frac{\mu_1}{\sigma}\right)^{2-1} m \left(\frac{\mu_1}{\sigma}\right)^2 \\ p_{1m} &= \frac{1}{\left[\Gamma\left(\frac{\mu_1}{\sigma}\right)^2\right]^m} \cdot \exp\left\{-\frac{\mu_1}{\sigma^2} \sum_1^m x_\alpha\right\} \cdot \left(\prod_1^m x_\alpha\right) \cdot \left(\frac{\mu_1}{\sigma^2}\right)^m \\ p_{2m} &= \frac{1}{\left[\Gamma\left(\frac{\mu_2}{\sigma}\right)^2\right]^m} \cdot \exp\left\{-\frac{\mu_2}{\sigma^2} \sum_1^m x_\alpha\right\} \cdot \left(\prod_1^m x_\alpha\right)^{\left(\frac{\mu_2}{\sigma}\right)^2-1} \cdot \left(\frac{\mu_2}{\sigma^2}\right)^m \left(\frac{\mu_2}{\sigma}\right)^2\end{aligned}\quad (3)$$

Suivant le procédé habituel on écrira que :

$$\begin{aligned}B &< \frac{p_{2m}}{p_{1m}} < A \\ A &= \frac{1-\beta}{\alpha} \quad B = \frac{\beta}{1-\alpha}\end{aligned}$$

On a :

$$\frac{p_{2m}}{p_{1m}} = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu_2}{\sigma}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{\mu_1}{\sigma}\right)^2}\right]^m \exp\left\{\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma^2} \sum_1^m x_\alpha\right\} \left(\prod_1^m x_\alpha\right)^{\frac{\mu_2^2 - \mu_1^2}{\sigma^2}} \frac{\left(\frac{\mu_2}{\sigma^2}\right)^m \left(\frac{\mu_2}{\sigma}\right)^2}{\left(\frac{\mu_1}{\sigma^2}\right)^m \left(\frac{\mu_1}{\sigma}\right)^2}$$

En prenant les logarithmes népériens des deux membres, il vient :

$$\begin{aligned}\log \frac{p_{2m}}{p_{1m}} &= m \log \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu_2}{\sigma}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{\mu_1}{\sigma}\right)^2}\right] - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma^2} \sum_1^m x_\alpha + \frac{\mu_2^2 - \mu_1^2}{\sigma^2} \sum_1^m \log x_\alpha \\ &+ m \left[\left(\frac{\mu_2}{\sigma}\right)^2 \log \frac{\mu_2}{\sigma^2} - \left(\frac{\mu_1}{\sigma}\right)^2 \log \frac{\mu_1}{\sigma^2} \right] \dots/\end{aligned}\quad (4)$$

Soit alors $y_\alpha = x_\alpha - (\mu_1 + \mu_2) \log x_\alpha$ (5)

(4) s'écrit ensuite en utilisant (5) :

$$\log \frac{p_m}{p_m} = m \left\{ \log \left[\frac{\left(\frac{\mu_1}{\sigma} \right)^2}{\left(\frac{\mu_1}{\sigma} \right)^2} \right] + \left(\frac{\mu_2}{\sigma} \right)^2 \log \frac{\mu_2}{\sigma^2} - \left(\frac{\mu_1}{\sigma} \right)^2 \log \frac{\mu_1}{\sigma^2} \right\} - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma^2} \sum y_\alpha \quad (6)$$

Posons $s = \frac{\sigma^2}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ \dots \right\}$ (7)

La condition que l'on impose au rapport p_m/p_m peut s'écrire sous forme logarithmique :

$$\log B < \log \frac{p_m}{p_m} < \log A$$

soit : $\frac{\sigma^2}{\mu_2 - \mu_1} \log B < ms - \sum y_\alpha < \frac{\sigma^2}{\mu_2 - \mu_1} \log A$

d'où en changeant tous les signes pour la commodité d'écriture :

$$ms - \frac{\sigma^2}{\mu_2 - \mu_1} \log \frac{1-\beta}{\alpha} < \sum y_\alpha < ms + \frac{\sigma^2}{\mu_2 - \mu_1} \log \frac{1-\alpha}{\beta} \quad (8)$$

On sera donc conduit à :

refuser le lot si $\sum y_\alpha < -h_1 + ms$
accepter le lot si $\sum y_\alpha > h_2 + ms$

où $h_1 = \frac{\sigma^2}{\mu_2 - \mu_1} \log \frac{1-\beta}{\alpha}$ (9)

$$h_2 = \frac{\sigma^2}{\mu_2 - \mu_1} \log \frac{1-\alpha}{\beta}$$

On voit donc que :

1°/ Comme dans le cas de la loi normale les limites du domaine d'acceptation sont constituées par des droites.

2°/ La quantité y_α dont il faut porter la somme n'est plus la quantité mesurée elle-même mais une fonction de celle-ci qu'il n'est pas très difficile de calculer au fur et à mesure des résultats.

III. On peut également calculer la courbe OC d'efficacité du test, par points. On démontre en effet que si $f(x, \theta)$ est la fonction de densité de probabilité de x , intervient une fonction $h(\theta)$ du paramètre définie par la relation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{f(x, \theta_2)}{f(x, \theta_1)} \right]^{h(\theta)} f(x, \theta) dx = 1 \quad (10)$$

.../

Connaissant alors $h(\theta)$ la fonction $\mathcal{L}(\theta)$ représentant la courbe OC
a pour équation :

$$\mathcal{L}(\theta) \approx \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}} \quad (11)$$

A et B ayant les valeurs indiquées précédemment.

La fonction $f(x, \theta)$ est ici la fonction de Pearson type III
 $\frac{1}{\Gamma(K)} e^{-x/\alpha} x^{K-1} / \alpha^K$ dans laquelle il faut faire apparaître
le paramètre θ . On sait que $\alpha = \frac{\sigma^2}{\mu}$ et $K = \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2$, σ
étant fixé, on peut prendre pour θ la valeur $\frac{\mu}{\sigma} = \theta$.

$f(x, \theta)$ s'écrit alors :

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\theta^2)} e^{-\frac{\theta}{\sigma} x} \frac{x^{\theta^2-1}}{(\sigma/\theta)^{\theta^2}}$$

d'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\theta^2)} \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^{\theta^2} e^{-\frac{\theta}{\sigma} x} x^{\theta^2-1} \left[\frac{\Gamma(\theta_2^2)^{-1} \left(\frac{\theta_2}{\sigma}\right)^{\theta_2^2} e^{-x\theta_2/\sigma} x^{\theta_2^2-1}}{\Gamma(\theta_1^2)^{-1} \left(\frac{\theta_1}{\sigma}\right)^{\theta_1^2} e^{-x\theta_1/\sigma} x^{\theta_1^2-1}} \right] h(\theta) dx = 1$$

$$\text{soit : } \Gamma(\theta^2)^{-1} \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^{\theta^2} \left[\frac{\Gamma(\theta_2^2)^{-1} \left(\frac{\theta_2}{\sigma}\right)^{\theta_2^2}}{\Gamma(\theta_1^2)^{-1} \left(\frac{\theta_1}{\sigma}\right)^{\theta_1^2}} \right] h(\theta) \int_0^{+\infty} e^{-x \left[\frac{\theta + (\theta_2 - \theta_1) h(\theta)}{\sigma} \right]} x^{\theta^2 + (\theta_2^2 - \theta_1^2) h(\theta) - 1} dx = 1$$

en posant :

$$x = u \frac{\sigma}{\theta + (\theta_2 - \theta_1) h(\theta)} \quad \text{on fait}$$

apparaître la fonction eulérienne et cette relation s'écrit :

$$\Gamma(\theta^2)^{-1} \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^{\theta^2} \left[\frac{\Gamma(\theta_1^2)^{-1} \left(\frac{\theta_1}{\sigma}\right)^{\theta_1^2}}{\Gamma(\theta_2^2)^{-1} \left(\frac{\theta_2}{\sigma}\right)^{\theta_2^2}} \right] h(\theta) \left[\frac{\sigma}{\theta + (\theta_2 - \theta_1) h(\theta)} \right]^{\theta^2 + (\theta_2^2 - \theta_1^2) h(\theta)} \Gamma[\theta^2 + (\theta_2^2 - \theta_1^2) h(\theta)] = 1 \quad (12)$$

L'expression (12) ci-dessus n'est pas soluble. Soit en θ en
considérant $h(\theta) = h$ comme un paramètre, soit en tirant directement

$h(\theta)$ en fonction de θ . Mais un calcul numérique de $h(\theta)$ pour
chaque valeur de θ est toujours possible. On a ainsi la courbe

par points :

$$\mathcal{L}(\theta) \approx \frac{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{h(\theta)} - 1}{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{h(\theta)} - \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{h(\theta)}} \quad (13)$$

..../

II. Ayant obtenu la courbe OC on peut en déduire la courbe ASN donnant l'importance moyenne des échantillons. Le maximum de la courbe donne la valeur permettant de tronquer le test et est par suite extrêmement importante.

On démontre que cette fonction : $E_{\theta}(n)$ est donnée par l'expression

$$E_{\theta}(n) = \frac{\mathcal{L}(\theta) \log B + [1 - \mathcal{L}(\theta)] \log A}{E_{\theta}(z)} \quad (14)$$

où
$$z = \log \frac{f(\theta_2, x)}{f(\theta_1, x)} \quad (15)$$

$\mathcal{L}(\theta)$, A et B sont connues. On peut évaluer z , $f(x, \theta)$ étant égal à $\Gamma^{-1}(\theta^2) \exp\left\{-\frac{\theta}{\sigma} x\right\} x^{\frac{\theta^2-1}{\sigma}} \left(\frac{\sigma}{\theta}\right)^{\theta^2}$

On aura

$$z = \log \frac{\Gamma(\theta_1^2)}{\Gamma(\theta_2^2)} + \theta_2^2 \log \frac{\theta_2}{\sigma} - \theta_1^2 \log \frac{\theta_1}{\sigma} - x \frac{\theta_2 - \theta_1}{\sigma} + (\theta_2^2 - \theta_1^2) \log x \quad (16)$$

La valeur de $E_{\theta}(z)$ pour la valeur de θ est la valeur correspondant à la valeur moyenne de x , soit μ c'est à dire $\theta \sigma$.

En remplaçant dans 16, on a :

$$E_{\theta}(z) = \log \frac{\Gamma(\theta_1^2)}{\Gamma(\theta_2^2)} + \theta_2^2 \log \theta_2 \theta - \theta_1^2 \log \theta_1 \theta - (\theta_2 - \theta_1) \theta \quad (17)$$

En reportant dans 14 on peut calculer par points la courbe ASN.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

« Modèles d'apprentissages Markoviens tenant compte de l'interaction entre les individus du groupe soumis à expérimentation ».

Vu et approuvé :

Paris, le 25 mai 19 62

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie
de Paris,

Jean ROCHE

